

【基础理论研究】微分方程与动力系统专题

Hessian 商方程 Neumann 问题解的梯度估计

袁胜通, 吴婷婷, 韩 菲

(新疆师范大学 数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830017)

摘 要: 研究一类具有 Neumann 边界条件的 Hessian 商方程, 选取合适的辅助函数, 利用极值原理与 Hessian 算子的结构性质, 将梯度估计分为三类情形, 依次得到边界梯度估计、近边梯度估计与内部梯度估计, 最终得到此类 Hessian 商方程在 f 依赖于 x, Du 时解的全局梯度估计。

关键词: Hessian 商方程; 全局梯度估计; Neumann 问题; 极值原理; Hessian 算子

中图分类号: O 175 **文献标识码:** A **DOI:** 10.13486/j.issn.2097-4973.2026.02.014

0 引言

Hessian 方程是一类完全非线性的椭圆型偏微分方程, 这类方程广泛应用于微分几何、复几何和凸几何等领域。近年来, Hessian 方程已成为偏微分方程研究的焦点之一。在研究 Hessian 方程解的存在性和唯一性时, 需要考虑其解的先验估计和正则性。对于 Hessian 商方程

$$\frac{\sigma_k(D^2 u)}{\sigma_l(D^2 u)} = f(x, \nabla u), x \in \Omega, \quad (1)$$

其中, $0 \leq l \leq k \leq n$, $D^2 u$ 是 u 的 Hessian 矩阵, σ_k 和 σ_l 是该矩阵特征值的 k 阶和 l 阶基本对称函数, 如果 u 满足 $\lambda(D^2 u) \in \tilde{\Gamma}_k$ (即 $\eta \in \Gamma_k$, 见定义 1), 则方程 (1) 是椭圆的, u 称为 k 阶容许解。当 $l=0$ 时, 方程 (1) 即为 k -Hessian 方程, 因此, Hessian 商方程是 k -Hessian 方程的自然推广。对于较简单的 k -Hessian 方程类, 如拉普拉斯方程, 许多学者已进行了广泛研究并得到了不错的结果, 如平均曲率方程 Neumann 问题的梯度估计^[1]。当 $k=n$ 时, k -Hessian 方程是非常重要的蒙日-安培方程, 具有广泛的应用, 如闵可夫斯基问题^[2]和最优传输问题^[3]。

关于 Hessian 方程, 文献[4]研究了蒙日-安培方程 $\sigma_2(D^2 u) = f, x \in B_R(0) \subset \mathbf{R}^2$, 并利用凸解的性质和单值化定理, 获得了内部 C^2 估计。对于 $k=n \geq 3$ 的 k -Hessian 方程, 文献[5]给出了一个反例, 表明此类方程解的内部估计不存在。在 $f=1, k=2, n=3$ 的情况下, 文献[6]研究了三维的 k -Hessian 方程 $\sigma_2(D^2 u) = 1, x \in B_R(0) \subset \mathbf{R}^3$ 解的内部 C^2 估计。Hessian 方程边值问题也备受关注, 文献[7]研究了具有狄利克雷边值问题的 k -Hessian 方程解的 C^0 估计、 C^1 估计和 C^2 估计, 进一步获得了解的存在性定理。Trudinger 推广了 k -Hessian 方程, 获得了更一般的 Hessian 方程狄利克雷问题解的存在性^[8], 并提出

收稿日期: 2025-07-21

基金项目: 国家自然科学基金项目(12061078); 新疆维吾尔自治区自然科学基金项目(2024DO1A90)

第一作者简介: 袁胜通(2000—), 男, 云南宣威人, 硕士研究生, 主要从事几何分析研究。

E-mail: 2634168487@qq.com

通信作者简介: 韩 菲(1973—), 女, 江西永新人, 教授, 博士, 硕士生导师, 主要从事几何分析研究。

E-mail: 137823121@qq.com

k -Hessian 方程的 Neumann 问题在边界一致凸区域上可能是有解的猜想^[9]。文献[10]得到了一般区域上 k -Hessian 方程 Neumann 边值问题解的近边梯度估计。文献[11]通过构造合适的上下闸函数彻底解决了 Trudinger 猜想, 并获得了 k -Hessian 方程 Neumann 问题解的边界双法向导数估计。对于 Hessian 商方程, 文献[12]研究了方程

$$\frac{\sigma_k(D^2 u)}{\sigma_l(D^2 u)} = f(x, u, \nabla u), x \in B_r(0) \subset \mathbf{R}^n,$$

获得了此类方程解的内部梯度估计; 当 $k \leq n-1$ 时, 文献[13]建立了一类 Hessian 商方程解的内部 C^2 估计; 文献[14]研究了一类 Hessian 商方程 Neumann 问题得到了其解的内部先验估计; 文献[15]利用极值原理及文献[10-11]中的思想, 在严格凸边界情形下研究了 Hessian 商方程

$$\begin{cases} \frac{\sigma_k(D^2 u)}{\sigma_l(D^2 u)} = f(x), x \in \Omega, \\ u_v = \varphi(x, u), x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的 Neumann 边值问题, 并将文献[11]的结果推广到更一般的情形。考虑上述对 Hessian 商方程边值问题的推广, 本文研究如下 Hessian 商方程的 Neumann 边值问题

$$\begin{cases} \frac{\sigma_k(D^2 u)}{\sigma_l(D^2 u)} = f(x, \nabla u), x \in \Omega, \\ u_v = \varphi(x, u), x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (2)$$

并得到了其解的全局梯度估计, 其中 v 为单位外法向。与文献[15]相比, 方程(2)的非线性更强, 方程的解更加复杂多样, 这对于推导解的梯度估计更加具有挑战性。

1 预备知识

现给出文中使用到的一些基础知识, 包括常用符号、Hessian 算子的定义等。

对于任意的 $k=1, 2, \dots, n$, 有 $\sigma_k(\eta) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \eta_{i_1} \eta_{i_2} \dots \eta_{i_k}$, 其中,

$$\sigma_0(\eta) = 1, \sigma_k(\eta) = 0 \text{ (当 } k > n \text{ 时)}, \sigma_k(\eta \mid i) = \sigma_k(\eta \mid \eta_i = 0), \sigma_k(\eta \mid ij) = \sigma_k(\eta \mid \eta_i = \eta_j = 0)。$$

定义 1 对于 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 和 $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ 满足 $\eta_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j$, 定义 Gårding 锥

$$\Gamma_k = \{\lambda \in \mathbf{R}^n : \sigma_i(\lambda) > 0, \forall 1 \leq i \leq k\}, 1 \leq k \leq n,$$

令 $\tilde{\Gamma}_k = \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \sigma_i(\eta) > 0, \forall 1 \leq i \leq k\}$ 。

设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n (n \geq 2)$ 为有界区域, 且 $\partial\Omega \in C^3$ 。令 $d(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$, $\Omega_\mu = \{x \in \Omega : d(x) < \mu\}$, 其中, μ 是充分小的正数。据文献[12], 取 $v = -Dd$, 且 v 是 Ω_μ 中的 $C^2(\bar{\Omega}_\mu)$ 向量场, 可以得到

$$|Dv| + |D^2 v| \leq C_0(n, \Omega), \forall x \in \Omega_\mu,$$

$$\sum_{1 \leq i \leq n} v^i D_j v^i = 0, \sum_{1 \leq i \leq n} v^i D_i v^i = 0, |v| = 1, \forall x \in \Omega_\mu。$$

根据文献[16-17], 定义 $c^{ij} = \delta_{ij} - v^i v^j$, $\forall x \in \Omega_\mu$ 。对任意 $\xi \in \mathbf{R}^n$, ξ' 是 ξ 的切向部分, 其第 i 个分量为

$\sum_{j=1}^n c^{ij} \xi_j$ 。令 $D'u$ 为 u 的切向梯度, 则有

$$|D'u|^2 = \sum_{i,j=1}^n c^{ij} u_i u_j, |Du|^2 = |D'u|^2 + u_v^2,$$

其中, v 为单位外法向量。

命题 1 设 $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \in \mathbf{R}^n$ 且 $1 \leq k \leq n$, 则有:

$$\sigma_k(\eta) = \sigma_k(\eta \mid i) + \eta_i \sigma_{k-1}(\eta \mid i), \forall 1 \leq i \leq n; \sum_{i=1}^n \eta_i \sigma_{k-1}(\eta \mid i) = k \sigma_k(\eta); \sum_{i=1}^n \sigma_k(\eta \mid i) = (n-k) \sigma_k(\eta)。$$

命题 2 (Newton-Maclaurin 不等式) 设 $\lambda \in \Gamma_k, n \geq k > l \geq 0, n \geq r > s \geq 0, k \geq r, l \geq s$, 则

$$\left[\frac{\sigma_k(\lambda)/C_n^k}{\sigma_l(\lambda)/C_n^l} \right]^{\frac{1}{k-l}} \leq \left[\frac{\sigma_r(\lambda)/C_n^r}{\sigma_s(\lambda)/C_n^s} \right]^{\frac{1}{r-s}},$$

其中, C_n^k 是组合系数, 当且仅当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n$ 时等号成立。特别地,

$$k(n-l+1)\sigma_k(\lambda)\sigma_{l-1}(\lambda) \leq l(n-k+1)\sigma_{k-1}(\lambda)\sigma_l(\lambda)。$$

命题 3 假设矩阵 $W = (W_{ij})$ 可对角化, 则有

$$\frac{\partial \sigma_m(W)}{\partial W_{ij}} = \begin{cases} \sigma_{m-1}(W|i), & i=j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad \frac{\partial^2 \sigma_m(W)}{\partial W_{ij} \partial W_{kl}} = \begin{cases} \sigma_{m-2}(W|ik), & i=j, k=l, i \neq k, \\ -\sigma_{m-2}(W|ik), & i=l, j=k, i \neq j, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中, m 为正整数。

命题 4 一些 Hessian 算子的性质:

(i) $\tilde{\Gamma}_k$ 是凸锥, 且 $\Gamma_1 = \tilde{\Gamma}_1 \supset \tilde{\Gamma}_2 \supset \dots \supset \tilde{\Gamma}_n \supset \Gamma_2$;

(ii) 若 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \tilde{\Gamma}_k$, 则有

$$\frac{\partial \left[\frac{\sigma_k(\eta)}{\sigma_l(\eta)} \right]}{\partial \lambda_i} = \sum_{p \neq i} \frac{\sigma_{k-1}(n|p)\sigma_l(\eta) - \sigma_k(\eta)\sigma_{l-1}(\eta|p)}{\sigma_l(\eta)^2} \geq \frac{n(k-l)}{k(n-l)} \sum_{p \neq i} \frac{\sigma_{k-1}(n|p)\sigma_l(\eta|p)}{\sigma_l(\eta)^2} > 0,$$

对任意 $i=1, 2, \dots, n$, 其中 $0 \leq l < k \leq n$;

(iii) 若 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \tilde{\Gamma}_k$, 则 $\left[\frac{\sigma_k(\eta)}{\sigma_l(\eta)} \right]^{\frac{1}{k-l}} (0 \leq l < k \leq n)$ 关于 λ 是凹的。因此, 对任意 $(\xi_1, \dots, \xi_n)$, 有

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \left[\frac{\sigma_k(\eta)}{\sigma_l(\eta)} \right]}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \xi_i \xi_j \leq \left(1 - \frac{1}{k-l} \right) \frac{\left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial \left[\frac{\sigma_k(\eta)}{\sigma_l(\eta)} \right]}{\partial \lambda_i} \xi_i \right]^2}{\frac{\sigma_k(\eta)}{\sigma_l(\eta)}}。$$

引理 1 假设 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \tilde{\Gamma}_k$ 且 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, 则有:

(i) $\eta_1 \leq \eta_2 \leq \dots \leq \eta_n$ 且 $\eta_{n-k+1} > 0$;

(ii) $\sigma_{k-1}(\eta|n-k+1) \geq c(n, k)\sigma_{k-1}(\eta), 0 \leq l < k \leq n$;

(iii) $\frac{\partial \left[\frac{\sigma_k(\eta)}{\sigma_l(\eta)} \right]}{\partial \eta_1} \geq \frac{\partial \left[\frac{\sigma_k(\eta)}{\sigma_l(\eta)} \right]}{\partial \eta_2} \geq \dots \geq \frac{\partial \left[\frac{\sigma_k(\eta)}{\sigma_l(\eta)} \right]}{\partial \eta_n}, 0 \leq l < k \leq n$;

(iv) $\frac{\partial \left[\frac{\sigma_k(\eta)}{\sigma_l(\eta)} \right]}{\partial \lambda_1} \leq \frac{\partial \left[\frac{\sigma_k(\eta)}{\sigma_l(\eta)} \right]}{\partial \lambda_2} \leq \dots \leq \frac{\partial \left[\frac{\sigma_k(\eta)}{\sigma_l(\eta)} \right]}{\partial \lambda_n}, 0 \leq l < k \leq n$;

(v) $\forall 1 \leq i \leq n, \frac{\partial \left[\frac{\sigma_k(\eta)}{\sigma_l(\eta)} \right]}{\partial \lambda_i} \geq c(n, k, l) \sum_j \frac{\partial \left[\frac{\sigma_k(\eta)}{\sigma_l(\eta)} \right]}{\partial \lambda_j}, 0 \leq l < k \leq n。$

命题 5 由命题 2 可得

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{\partial \left[\frac{\sigma_k(\eta)}{\sigma_l(\eta)} \right]}{\partial \lambda_i} &= (n-1) \frac{(n-k+1)\sigma_{k-1}(\eta)\sigma_l(\eta) - (n-l+1)\sigma_k(\eta)\sigma_{l-1}(\eta)^2}{\sigma_l(\eta)} \geq \\ &= (n-1) \frac{(n-k+1)\sigma_{k-1}(\eta)\sigma_l(\eta) - \frac{l}{k}(n-k+1)\sigma_{k-1}(\eta)\sigma_l(\eta)}{\sigma_l(\eta)^2} = \\ &= (n-1)(n-k+1) \left(1 - \frac{l}{k} \right) \frac{\sigma_{k-1}(\eta)}{\sigma_l(\eta)} \geq c(n, k, l) \left[\frac{\sigma_k(\eta)}{\sigma_l(\eta)} \right]^{1-\frac{1}{k-l}}。 \end{aligned}$$

由引理 1(V) 及方程(1)可得

$$\forall i, \frac{\partial \left[\frac{\sigma_k(\eta)}{\sigma_l(\eta)} \right]}{\partial \lambda_i} \geq c(n, k, l) \sum_i \frac{\partial \left[\frac{\sigma_k(\eta)}{\sigma_l(\eta)} \right]}{\partial \lambda_i} \geq c(n, k, l) f^{1-\frac{1}{k-l}}.$$

方程(1)对于埃尔米特矩阵 $\nabla^2 u$ 是严格椭圆的, 等价于

$$\left\{ \frac{\partial \left[\frac{\sigma_k(\eta)}{\sigma_l(\eta)} \right]}{\partial u_i} \right\} \geq c(n, k, l, \min f) I_n.$$

$\left[\frac{\sigma_k(\eta)}{\sigma_l(\eta)} \right]^{\frac{1}{k-l}}$ 对于矩阵 $\nabla^2 u$ 是凸的, 等价于 $\forall n \times n$ 埃尔米特矩阵 ξ_{ij} , 有

$$\sum_{i,j,r,s} \frac{\partial^2 \left| \frac{\sigma_k(\eta)}{\sigma_l(\eta)} \right|}{\partial u_{ij} \partial u_{rs}} \xi_{ij} \xi_{rs} \leq \left(1 - \frac{1}{k-l} \right) \frac{\left[\sum_{i,j} \frac{\partial \left| \frac{\sigma_k(\eta)}{\sigma_l(\eta)} \right|}{\partial u_{ij}} \xi_{ij} \right]^2}{\frac{\sigma_k(\eta)}{\sigma_l(\eta)}}.$$

矩阵 $\nabla^2 u$ 在某点处可对角化, 等价于

$$\frac{\partial \left[\frac{\sigma_k(\eta)}{\sigma_l(\eta)} \right]}{\partial u_{ij}} = \frac{\partial \left[\frac{\sigma_k(\eta)}{\sigma_l(\eta)} \right]}{\partial \lambda_p} \frac{\partial \lambda_p}{\partial u_{ij}} = \begin{cases} \frac{\partial \left[\frac{\sigma_k(\eta)}{\sigma_l(\eta)} \right]}{\partial \lambda_i}, & i=j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 \left[\frac{\sigma_k(\eta)}{\sigma_l(\eta)} \right]}{\partial u_{ij} \partial u_{rs}} = \frac{\partial^2 \left[\frac{\sigma_k(\eta)}{\sigma_l(\eta)} \right]}{\partial \lambda_p \partial \lambda_q} \frac{\partial \lambda_p}{\partial u_{ij}} \frac{\partial \lambda_q}{\partial u_{rs}} + \frac{\partial \left[\frac{\sigma_k(\eta)}{\sigma_l(\eta)} \right]}{\partial \lambda_p} \frac{\partial^2 \lambda_p}{\partial u_{ij} \partial u_{rs}} = \begin{cases} \frac{\partial^2 \left[\frac{\sigma_k(\eta)}{\sigma_l(\eta)} \right]}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j}, & i=j, r=s, \\ \frac{\partial \left[\frac{\sigma_k(\eta)}{\sigma_l(\eta)} \right]}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial \left[\frac{\sigma_k(\eta)}{\sigma_l(\eta)} \right]}{\partial \lambda_j}, & s=i \neq j=r, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

命题 6 假设对称矩阵 $A = \{a_{ij}\}_{n \times n}$ 满足 $a_{11} < 0$ 且 $\{a_{ij}\}_{2 \leq i, j \leq n}$ 是对角的, $\lambda(A) \in \Gamma_k (k \geq 1)$, 则有

$$\frac{\partial \left[\frac{\sigma_k(A)}{\sigma_l(A)} \right]}{\partial a_{11}} \geq b_0 \frac{\partial \left[\frac{\sigma_k(A)}{\sigma_l(A)} \right]}{\partial a_{ii}}, \sum_{i=1}^n \frac{\partial \left[\frac{\sigma_k(A)}{\sigma_l(A)} \right]}{\partial a_{ii}} \geq b_1 (-a_{11})^{k-l-1}, \forall 0 \leq l \leq k,$$

其中, $b_0 = \frac{nk-l}{k(n-l)}, b_1 = \frac{k-l}{k} \frac{l}{C_n^l}$.

2 主要结果及证明

利用极值原理及文献[10]中的思想, 研究 Hessian 商方程 Neumann 问题(2), 进一步得到问题解的全局梯度估计, 其主要结果如下。

定理 1 设 $u \in C^3(\Omega) \cap C^2(\bar{\Omega})$ 是 Hessian 商方程(2)的 k 阶容许解。 f 和 φ 分别是定义在 $C^3(\bar{\Omega} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3)$ 和 $C^3(\partial\Omega \times \mathbf{R})$ 上的函数。假设存在常数 L_1, L_2 使得 f 和 φ 满足以下条件:

$$f(x, z) > 0, \forall x \in \bar{\Omega} \times \mathbf{R},$$

$$|f(x, z, p)| + |f_x(x, z, p)| + \left| \sum_{1 \leq i \leq n} u_{x_i} u_{x_i} v^{-1} f_{p_i}(x, z, p) \right| \leq \frac{L_1}{v}, \forall x \in \bar{\Omega} \times \mathbf{R},$$

$$|\varphi(x)|_{C^3(\Omega \times \mathbf{R})} \leq L_2,$$

其中, $v = \sqrt{1 + |\nabla u|^2}$, 则存在常数 $\mu > 0$ 使得 $\sup_{\Omega_p} |\nabla u| \leq \max\{M_1, M_2\}$, M_1 是仅依赖于 n, k, l, μ, L_1 的正

常数, M_2 是仅依赖于 n, k, l, μ, L_1, L_2 的正常数。

引理 2^[10] 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界 C^3 区域, $u \in C^3(\Omega)$ 是方程 $\frac{\sigma_k(D^2 u)}{\sigma_l(D^2 u)} = f(x, \nabla u)$, $B_r(0) \subset \mathbf{R}^n$ 的 k 阶容许解, f 是正函数且 $|f|_{C^1} \leq L_1$, 则存在正常数 μ 使得 $\sup_{\Omega_\mu} |\nabla u| \leq M_0$, 其中 M_0 是仅依赖于 $n, k, l, \mu, |u|_{C^0}, |f|_{C^1}$ 的正常数。

定理 1 的证明 引入辅助函数 $G(x) = \log |\nabla w|^2 + h(u) + g(d)$, 其中

$$w(x) = u(x) + \varphi(x, u)d(x), \quad (3)$$

$$h(u) = -\log(M_1 - u), \quad (4)$$

$$g(d) = \alpha_0 d. \quad (5)$$

这里, $M_1 = |u|_{C^0} + 1$, α_0 是充分大的正常数(将在证明过程中确定)。假设 $G(x)$ 在点 $x_0 \in \overline{\Omega}_\mu$ 处取得最大值, 则只需做 u 在 x_0 处的梯度估计。设 $|\nabla u|(x_0) \geq 12n|\varphi|_{C^1} + 1$ (否则估计成立)。由式(4)可得

$$-\log(1 + 3M_1) \leq h \leq -\log(1 + M_1), \frac{1}{1 + 3M_1} \leq h' \leq \frac{1}{1 + M_1}, \frac{1}{(1 + 3M_1)^2} \leq h'' \leq \frac{1}{(1 + M_1)^2}, \quad (6)$$

对式(3)两边求一次微分可得

$$w_i = u_i + (\varphi_i + \varphi_u u_i)d + \varphi d_i. \quad (7)$$

由于 μ 充分小, 取 $\mu \leq \frac{1}{20(1 + |\varphi|_{C^1})}$, 则有

$$\frac{1}{2} |Du|^2(x_0) \leq |Dw|^2(x_0) \leq 2 |Du|^2(x_0). \quad (8)$$

下面分三种情况证明 $G(x)$ 在点 $x_0 \in \overline{\Omega}_\mu$ 处取得最大值: 一是边界情形, 当 $x_0 \in \partial\Omega$ 时, $G(x)$ 在边界取得最大值; 二是近边情形, 当 $x_0 \in \Omega_\mu$ 时, $G(x)$ 在近边区域取得最大值, 可利用极值原理得到 $G(x_0)$ 的估计; 三是内部情形, 当 $x_0 \in \Omega \setminus \Omega_\mu$ 时, $G(x)$ 在内部取得最大值, 可由引理 2 的梯度估计得到 $|Du|(x_0)$ 的估计, 进而得到 $G(x_0)$ 的估计。

2.1 边界梯度估计

根据文献[17], 选取适当的坐标系。由于 $\partial\Omega \in C^3$, 设 $x_0 = 0$ 且 $\partial\Omega$ 的局部表示为 $\partial\Omega = (x', \rho(x'))$, 其中 $\rho(x')$ 是 C^3 函数且满足 $\rho(0) = 0, \nabla\rho(0) = 0$ 。因此

$$v(x_0) = (0, \dots, 0, -1), w_n = u_n + (D_n\varphi + \varphi d_n) = u_n + \varphi,$$

由 Neumann 边界条件可得 $w_n = u_n + \varphi = 0$ 。通过坐标旋转, 可设 $w_1(x_0) = |Dw|(x_0)$ 。由极值原理可知, 在 x_0 处有

$$0 \geq G_n = \frac{|Dw|_n^2}{|Dw|^2} + h'u_n + g' = \frac{2w_k w_m}{|Dw|^2} + h'u_n + g' = \frac{2w_{1n}}{w_1} - h'\varphi + \alpha_0. \quad (9)$$

对边界条件两边沿切向 e_1 方向微分有

$$-u_{n1} + u_i v_1^i = u_{i1} v^i + u_i v_1^i = D_1\varphi, \quad (10)$$

并且 $w_{1n} = u_{1n} - D_{1n}\varphi d - D_1\varphi d_n - D_n\varphi d_1 - \varphi d_{1n}$ 。又由于 $d|_{\partial\Omega} = 0, d_1(x_0) = v'(x_0) = 0$, 所以

$$w_{1n} = u_{1n} + D_1\varphi + \varphi d_{1n}. \quad (11)$$

将式(10)代入式(11)得

$$w_{1n} = u_i v_1^i - \varphi v_n^1 = u_1 v_1^1 + u_n v_1^n - \varphi v_n^1 = -w_1 v_1^1 - \varphi v_n^1 \geq -C w_1, \quad (12)$$

其中, 常数 $C > 2 |D^2 d|_{C^0} (1 + |\varphi|_{C^0})$ 。再将式(12)代入方程(9)得

$$0 > \frac{2w_{1n}}{w_1} - h'\varphi + g' \geq -2C - |\varphi|_{C^0} + \alpha_0 > 0,$$

矛盾。

2.2 近边梯度估计

当 $G(x)$ 在 $x_0 \in \Omega_{\rho_0}$ 处取得最大值时, 首先计算 $G(x)$ 在 x_0 处关于 i 方向的一阶和二阶导数, 有

$$0 = G_i = \frac{(|D\mathbf{w}|^2)_i}{|D\mathbf{w}|^2} + h'u_i + g'd_i = \frac{2}{|D\mathbf{w}|^2} \mathbf{w}_k \mathbf{w}_{ki} + h'u_i + \alpha_0 d_i = \frac{2\mathbf{w}_{1i}}{\mathbf{w}_1} + h'u_i + \alpha_0 d_i,$$

从而

$$\frac{2\mathbf{w}_{1i}}{\mathbf{w}_1} = -(h'u_i + \alpha_0 d_i). \quad (13)$$

由于

$$(|D\mathbf{w}|^2)_i = 2 \sum_{k=1}^n \mathbf{w}_k \mathbf{w}_{ki}, (|D\mathbf{w}|^2)_{ij} = 2 \sum_{k=1}^n \mathbf{w}_{kj} \mathbf{w}_{ki} + 2 \sum_{k=1}^n \mathbf{w}_k \mathbf{w}_{kij},$$

所以

$$G_{ij} = \frac{(|D\mathbf{w}|^2)_{ij}}{|D\mathbf{w}|^2} - \frac{(|D\mathbf{w}|^2)_i}{|D\mathbf{w}|^2} \frac{(|D\mathbf{w}|^2)_j}{|D\mathbf{w}|^2} + h'u_{ij} + h''u_i u_j + g'd_{ij} + g''d_i d_j =$$

$$\frac{2}{|D\mathbf{w}|^2} \sum_{k=1}^n (\mathbf{w}_{ki} \mathbf{w}_{kj} + \mathbf{w}_k \mathbf{w}_{kij}) - \frac{4}{|D\mathbf{w}|^4} \sum_{k=1}^n (\mathbf{w}_k^2 \mathbf{w}_{ki} \mathbf{w}_{kj}) + h'u_{ij} + h''u_i u_j + g''d_i d_j + g'd_{ij}.$$

记 $F(\nabla^2 u) = \frac{\sigma_k(\nabla^2 u)}{\sigma_l(\nabla^2 u)}$, $F^{ij} = \frac{\partial F}{\partial u_{ij}}$. 假设 u 是 k 阶容许解, 则 $F^{ij}(D^2 u) > 0$, 根据极值原理, 在点 x_0 处有

$$0 \geq F^{ij} G_{ij} = F^{ij} \frac{2}{|D\mathbf{w}|^2} \sum_{k=1}^n (\mathbf{w}_{ki} \mathbf{w}_{kj} + \mathbf{w}_k \mathbf{w}_{kij}) - F^{ij} \frac{4}{|D\mathbf{w}|^4} \sum_{k=1}^n (\mathbf{w}_k^2 \mathbf{w}_{ki} \mathbf{w}_{kj}) +$$

$$F^{ij} (h'u_{ij} + h''u_i u_j + g''d_i d_j + \alpha_0 d_{ij}) =$$

$$\frac{2}{\mathbf{w}_1^2} F^{ij} \sum_{k=1}^n (\mathbf{w}_{ki} \mathbf{w}_{kj} + \mathbf{w}_{1i} \mathbf{w}_{1j} + \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_{1ij}) - F^{ij} \frac{2}{\mathbf{w}_1} \frac{2}{\mathbf{w}_1} \mathbf{w}_{1i} \mathbf{w}_{1j} + F^{ij} (h'u_{ij} + h''u_i u_j + g''d_i d_j + \alpha_0 d_{ij}).$$

对式(7)两边微分一次可得

$$\mathbf{w}_{ij} = u_{ij} + \varphi_{ij} d + \varphi_{iu} u_j d + \varphi_{jd} d + \varphi_{u_j} u_i d + \varphi_{mu} u_i u_j d + \varphi_{u_i} u_j d + \varphi_{u_i} u_j d + \varphi_j d_i + \varphi_u u_j d_i + \varphi d_{ij} =$$

$$(1 + \varphi_u d) u_{ij} + (\varphi_{mu} u_i u_j + \varphi_{ui} u_j + \varphi_{ju} u_i + \varphi_{ij}) d + (\varphi_j + \varphi_u u_j) d_i + (\varphi_i + \varphi_u u_i) d_j + \varphi d_{ij},$$

因此

$$\mathbf{w}_{1i} = (1 + \varphi_u d) u_{1i} + (\varphi_{u1} u_1 u_i + \varphi_{ui} u_1 + \varphi_{1u} u_i + \varphi_{1i}) d + (\varphi_1 + \varphi_u u_1) d_i + (\varphi_i + \varphi_u u_i) d_1 + \varphi d_{1i}. \quad (14)$$

在适当的坐标系下, 通过坐标旋转使 $\mathbf{w}_1(x_0) = |D\mathbf{w}|(x_0) > 0$, 且 $u_{ij}(x_0)_{2 \leq i, j \leq n}$ 为对角矩阵. 令

$$\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_n) = (u_{22}(x_0), \dots, u_{nn}(x_0)),$$

所有后续计算均在 x_0 处进行. 因为 $u_1 = \frac{\mathbf{w}_1 + \varphi_1 d + \varphi d_1}{1 - \varphi_u d} > 0$, 又由式(13)可得 $\mathbf{w}_{11} = -\frac{1}{2}(g'd_1 + h'u_1)\mathbf{w}_1$,

所以对任意 $2 \leq i \leq n$, 有

$$u_1 = \frac{\mathbf{w}_1 + \varphi_1 d + \varphi d_1}{1 - \varphi_u d} > 0, \mathbf{w}_{1i} = -\frac{1}{2}(g'd_i + h'u_i)\mathbf{w}_1. \quad (15)$$

由于 $|Du|(x_0) \geq 12n(|\varphi|_{C^1} + 1)$, 因此

$$u_1 \geq \frac{\mathbf{w}_1 + |\varphi|_{C^1} + 1}{1 + \mu |\varphi|_{C^1} + 1} \geq \frac{\mathbf{w}_1}{2}, \quad (16)$$

故对任意 $2 \leq i \leq n$ 有

$$|u_i| \geq \frac{|\varphi|_{C^2} + 1}{1 + \mu |\varphi|_{C^1} + 1} \geq 2 |\varphi|_{C^2}. \quad (17)$$

由式(14)可得

$$\mathbf{w}_{11} = (1 + \varphi_u d) u_{11} + (\varphi_{u1} u_1 u_1 + \varphi_{u1} u_1 + \varphi_{1u} u_1 + \varphi_{11}) d + 2(\varphi_1 + \varphi_u u_1) d_1 + \varphi d_{11}.$$

假设 $\mathbf{w}_1(x_0)$ 充分大, 则由式(14)(15)可得

$$\begin{aligned}
 u_{11} &= \frac{\tau_{11}}{1-\varphi_u d} + \frac{(\varphi_{uu} u_1 u_1 + 2 \varphi_{u1} u_1 + \varphi_{11}) d}{1-\varphi_u d} + \frac{2(\varphi_1 + \varphi_u u_1) d_1}{1-\varphi_u d} + \frac{\varphi d_{11}}{1-\varphi_u d} = \\
 &= -\frac{(h' u_1 + \alpha_0 d_1) \tau_1}{2(1-\varphi_u d)} + \frac{\varphi_{uu} u_1 u_1 + 2(\varphi_{u1} u_1 + \varphi_{11}) d}{1-\varphi_u d} + \frac{2(\varphi_1 + \varphi_u u_1) d_1}{1-\varphi_u d} + \frac{\varphi d_{11}}{1-\varphi_u d} \leq \\
 &= -\frac{h' u_1 \tau_1}{2(1-\varphi_u d)} - \frac{\alpha_0 \tau_1 d_1}{2(1-\varphi_u d)} + \frac{|d| |\varphi_{uu}| u_1^2 + 2 |\varphi_{u1}| |d| u_1 + 2 |\varphi_u| |d_1| u_1 + 2 |\varphi_1| + |\varphi_{11}| + |\varphi| |d_{11}|}{1-\varphi_u d} \leq \\
 &= -\frac{(h' u_1 + \alpha_0 d_1) \tau_1}{2(1-\varphi_u d)} + \mu C u_1^2 + C u_1 + C \leq -\frac{h'}{2} u_1 \tau_1 \leq -\frac{1}{4 M_0} \tau_1^2 < 0,
 \end{aligned}$$

即

$$|u_{1i}| \leq C \tau_1^2, \forall 1 \leq i \leq n. \quad (18)$$

其中, 常数 C 仅依赖于 $|\varphi|_{C^2}$ 和 $|d|_{C^2}$, 与 μ 无关。

接下来继续处理 $\sum_{i=1}^n F^{ij} G_{ij}$, 对其进行适当放缩,

$$\begin{aligned}
 0 &\geq \sum_{i=1}^n F^{ij} G_{ij} \geq \frac{2 F^{ij} \tau_{1ij}}{\tau_1} - \frac{1}{2} F^{ij} \frac{2 \tau_{1i}}{\tau_1} \frac{2 \tau_{1j}}{\tau_1} + F^{ij} (h' u_{ij} + h'' u_i u_j + g'' d_i d_j + g' d_{ij}) \geq \\
 &= \frac{2 F^{ij} \tau_{1ij}}{\tau_1} - \frac{1}{2} F^{ij} (h' u_i + \alpha_0 d_i) (h' u_j + \alpha_0 d_j) + (k-l) f h' + F^{ij} (h'' u_i u_j - \alpha_0 d_{ij}) \geq \\
 &= \frac{2 F^{ij} \tau_{1ij}}{\tau_1} - F^{ij} \left(h'' - \frac{1}{2} h'^2 \right) u_i u_j - F^{ii} \alpha_0 h' d_i u_j + F^{ij} \alpha_0 d_{ij} - \frac{1}{2} F^{ii} \alpha_0^2 d_i d_j.
 \end{aligned}$$

根据式(6)及(16)~(18)有

$$\begin{aligned}
 F^{ij} \left(h'' - \frac{1}{2} h'^2 \right) u_i u_j &\geq \frac{1}{8 M_1^2} (F^{11} u_1^2 - 2 \sum_{i=2}^n |F^{1i} u_1 u_i|) \geq \\
 \frac{1}{8 M_1^2} \left(\frac{1}{2} F^{11} u_1^2 - 2 \sum_{i=2}^n F^{ii} u_i^2 \right) &\geq \frac{1}{16 M_1} F^{11} \tau_1^2 - C \sum_{i=1}^n F^{ii}, \quad (19)
 \end{aligned}$$

由式(16)得

$$-F^{ii} \alpha_0 h' d_i u_j \geq -d_i \alpha_0 h' |Du| \sum_{i=2}^n F^{ii} \geq C \tau_1 \sum_{i=2}^n F^{ii}, \quad (20)$$

由式(5)可得

$$F^{ii} \left(\alpha_0 d_{ij} - \frac{1}{2} \alpha_0^2 d_i d_j \right) \geq -C \sum_{i=2}^n F^{ii}, \quad (21)$$

对式(14)再微分一次, 并进行适当放缩有

$$\begin{aligned}
 \frac{2 F^{ij} \tau_{1ij}}{\tau_1} &= \frac{2}{\tau_1} [u_{ij1} + D_1 D_i D_j \varphi d + F^{ij} (2 D_1 D_i \varphi d_j + D_i D_j \varphi d_1) + F^{ij} (2 D_i \varphi d_{j1} + D_i \varphi d_{ij}) + \varphi F^{ij} d_{ij1}] \geq \\
 &= \frac{2}{\tau_1} [(1 + \varphi_u d) F^{ij} u_{ij1} + d \varphi_{uu} u_1 F^{ij} + 2 d \varphi_{ui} F^{ij} u_{11} u_j] + \\
 &= \frac{2}{\tau_1} [2 d F^{ij} u_{ij} u_{ju} + (\varphi_u + d \varphi_{1u} + d \varphi_{uu}) F^{ij} u_{ij} - C \sum_{i=2}^n F^{ii} \tau_1^2] \geq \\
 &= \frac{2}{\tau_1} [(1 + \varphi_u d) F^{ij} u_{ij1} - C d F^{11} \tau_1^3 - C \sum_{i=2}^n F^{ii} \tau_1^2] \geq \frac{2}{\tau_1} (1 + \varphi_u d) D_1 f - 2 C d F^{11} \tau_1^2 - 2 C \sum_{i=2}^n F^{ii} \tau_1.
 \end{aligned}$$

由于 $F^{ii} u_{ij} = (k-l)f$, 因此

$$\begin{aligned}
 \frac{2 F^{ij} \tau_{1ij}}{\tau_1} &\geq \frac{2}{\tau_1} (1 + \varphi_u d) (k-l) (f_{x_1} + f_{u_k} u_{k1}) - 2 C d F^{11} \tau_1^2 - 2 C \sum_{i=2}^n F^{ii} \tau_1 \geq \\
 &= \frac{C}{\tau_1} (1 + \varphi_u d) f_{x_1} + \frac{C}{\tau_1} f_{u_k} u_{k1} - 2 C d F^{11} \tau_1^2 - 2 C \sum_{i=2}^n F^{ii} \tau_1 \geq
 \end{aligned}$$

$$-\frac{C}{w_1} - Cd F^{11} w_1^2 - C \sum_{i=2}^n F^{ii} w_1 - C. \quad (22)$$

又由命题 6 得

$$F^{11} \geq b_0 \sum_{i=2}^n F^{ik}, \sum_{i=2}^n F^{ii} \geq b_1 (-u_{11})^{k-l-1} \geq b_2 \left(\frac{w_1^2}{16 M_0} \right)^{k-l-1},$$

因此由式(19) ~ (22) 可得

$$\begin{aligned} 0 &\geq \sum_{i=1}^n F^{ij} G_{ij} \geq -\frac{C}{w_1} - \left(\frac{1}{16 M_0} - Cd \right) F^{11} w_1^2 - C \sum_{i=1}^n F^{ii} w_1 - C \geq \\ &-\frac{C}{w_1} - \frac{1}{32 M_0} F^{11} w_1^2 - C \sum_{i=1}^n F^{ii} w_1 - C, \end{aligned}$$

于是

$$-\frac{C}{w_1} \geq \frac{1}{32 M_0} F^{11} w_1^2 - C \sum_{i=1}^n F^{ii} w_1 - C \geq \sum_{i=1}^n F^{ii} \left(\frac{1}{32 M_0} F^{11} w_1^2 - C w_1 - C \right).$$

因此 w_1 有界, 若 w_1 无界 (即 $w_1 \rightarrow \infty$), 则上式导致 $0 \geq \infty$ 的矛盾。故 $w_1(x_0) \leq \frac{64 M_1 C}{b_0 b_1}$ 。

2.3 内部梯度估计

当 $G(x)$ 在 $x_0 \in \Omega \setminus \Omega_{\mu_0}$ 处取得最大值时, 由文献[10]中 Chen 的内部梯度估计 (即引理 2) 可得 $|\nabla u|$ 的估计, 进而得到 $G(x_0)$ 的估计。

结合上述三种情况可知, $G(x)$ 在点 $x_0 \in \overline{\Omega}_\mu$ 处取得最大值, 进而得到 $|\nabla w|^2(x)$ 在点 $x_0 \in \overline{\Omega}_\mu$ 处取得最大值, 再由式(8)可得 u 的梯度估计, 定理 1 得证。

3 结论

通过引入适当的辅助函数, 利用极值原理与 Hessian 算子的结构性质, 得到了方程在右端函数 f 依赖于 x, Du 时具有 Neumann 边值问题的 Hessian 商方程解的全局梯度估计。定理 1 的证明过程主要利用函数在极大值点的性质, 分为极大值点在边界、近边和内部三种情形进行讨论。还可以进一步考虑此类 Hessian 商方程解的二阶导数估计, 从而利用连续性方法讨论解的存在性问题。

参考文献:

- [1] 徐金菊. 平均曲率方程 Neumann 问题的梯度估计[D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2014.
- [2] POGORELOV A V. The minkowski multidimensional problem[M]. New York: Halsted press, 1978.
- [3] TRUDINGER N S, WANG X J. On strict convexity and continuous differentiability of potential functions in optimal transportation[J]. Archive for rational mechanics and analysis, 2009, 192(3): 403-418.
- [4] HEINZ E. On elliptic Monge-Ampère equations and Weyl's embedding problem[J]. Journal d'analyse mathématique, 1959, 7(1): 1-52.
- [5] URBAS J. On the existence of nonclassical solutions for two classes of fully nonlinear elliptic equations [J]. Indiana University mathematics journal, 1990, 39(2): 355-382.
- [6] WARREN M, YUAN Y. Hessian estimates for the σ_2 -equation in dimension 3[J]. Communications on pure and applied mathematics, 2009, 62(3): 305-321.
- [7] CAFFARELLI L, NIRENBERG L, SPRUCK J. The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations III: functions of the eigenvalues of the Hessian[J]. Acta mathematica, 1985, 155

- (1):261-301.
- [8] TRUDINGER N S. On the Dirichlet problem for Hessian equations[J]. Acta mathematica, 1995, 175(1):151-164.
- [9] TRUDINGERS. Weak solutions of Hessian equations[J]. Communications in partial differential equations, 1997, 22(7/8):25-54.
- [10] 麻希南, 邱国寰, 徐金菊. Hesse 方程的 Neumann 问题的梯度估计[J]. 中国科学: 数学, 2016, 46(8):1117-1126.
- [11] MA X N, QIU G H. The Neumann problem for Hessian equations[J]. Communications in mathematical physics, 2019, 366(1):1-28.
- [12] CHEN C Q. The interior gradient estimate of Hessian quotient equations[J]. Journal of differential equations, 2015, 259(3):1014-1023.
- [13] MEI X Q. Interior C^2 estimates for the Hessian quotient type equation[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2023, 151(9):3913-3924.
- [14] LIEBERMAN G M. Oblique derivative problems for elliptic equations[M]. New Jersey: World Scientific, 2013.
- [15] CHEN C Q, ZHANG D K. The Neumann problem of Hessian quotient equations[J]. Bulletin of mathematical sciences, 2021, 11(1). DOI:10.1142/S1664360720500186.
- [16] POGORELOV A V. Regularity of a convex surface with given Gaussian curvature[J]. Matematiceskii sbornik, 1952, 31(1):88-103.
- [17] CHEN C Q, DONG W S, HAN F. Interior Hessian estimates for a class of Hessian type equations[J]. Calculus of variations and partial differential equations, 2023, 62(2). DOI:10.1007/s00526-022-02385-3.

The gradient estimates of solutions of Neumann problems for Hessian quotient equations

YUAN Shengtong, WU Tingting, HAN Fei

(School of Mathematics and Science, Xinjiang Normal University, Urumqi 830017, China)

Abstract: A class of Hessian quotient equations with Neumann boundary conditions is studied. The gradient estimates are divided into boundary gradient estimates, near-boundary gradient estimates and interior gradient estimates by selecting appropriate auxiliary functions and utilizing maximum principle and structural properties of the Hessian operator. Finally, a global gradient estimate for the solutions of such Hessian quotient equations when f depends on x and Du is obtained.

Keywords: Hessian quotient equations; global gradient estimate; Neumann problem; maximum principle; Hessian operator

(责任编辑: 贾晶晶)

引用格式 袁胜通, 吴婷婷, 韩菲. Hessian 商方程 Neumann 问题解的梯度估计[J]. 山东航空学院学报, 2026, 43(2):116-124.
YUAN S T, WU T T, HAN F. The gradient estimates of solutions of Neumann problems for Hessian quotient equations[J]. Journal of Shandong University of Aeronautics, 2026, 43(2):116-124.