

## 【基础理论研究】微分方程与动力系统专题

## 一类受媒体报道和疫苗接种影响的 SISV 模型

卜令杰<sup>1</sup>, 邢 伟<sup>2</sup>

(1. 郑州商学院 通识教育中心, 河南 郑州 451200;

2. 海南大学 信息与通信工程学院, 海南 海口 570228)

**摘 要:**建立了受媒体报道和疫苗接种双重影响的 SISV 模型, 得出了模型的基本再生数, 证明了模型平衡点的存在性及稳定性。基于此, 将疫苗接种有效率、疾病传染率及治疗有效率作为核心控制变量引入 SISV 模型构建最优控制问题, 得到了满足约束条件的最优控制方案。

**关键词:**SISV 模型; 基本再生数; 平衡点; 存在性; 稳定性; 最优控制

**中图分类号:** O 175.12 **文献标志码:** A **DOI:**10.13486/j.issn.2097-4973.2026.02.011

## 0 引言

传染病对人类健康构成严重威胁, 各种细菌、病毒和寄生虫都可能引发传染病, 如霍乱、麻疹、疟疾等, 这些疾病不仅会危及患者生命, 还会给社会带来沉重的经济负担, 因此如何预防以及有效控制传染病的传播一直备受关注<sup>[1-2]</sup>。随着人类社会的发展和科技的进步, 人们对传染病的认识和控制能力也在不断提高。媒体报道作为一种信息传播手段, 在传染病防控中扮演了重要角色。文献[3-7]分别利用饱和函数

$$f(I) = \begin{cases} e^{-mI} & 0 < I < I_c \\ e^{-mI_c} & I > I_c \end{cases}, f(I) = \beta_1 - \beta_2 \frac{I}{I+m_1}, f(I) = \frac{\mu}{1+mI^2}, f(I) = \beta e^{-aI} I$$

以及线性传染率来刻画媒体报道对传染率的影响, 并探讨了媒体报道对疾病传播的影响。疫苗接种也是预防传染病的有效手段之一, 通过接种疫苗, 人体可以产生相应的免疫力, 从而达到抵御病毒侵袭的目的<sup>[8-11]</sup>。因此, 同时考虑媒体报道和疫苗接种对传染病的影响尤为重要。基于此, 本文在文献[12]的基础上建立了受媒体报道和疫苗接种影响的 SISV 模型

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = (1-q)A - [\beta - \beta_1 f(I)]SI - (d+p)S + \gamma I + \epsilon V, \\ \frac{dI}{dt} = [\beta - \beta_1 f(I)]SI - (d+\alpha+\gamma)I, \\ \frac{dV}{dt} = qA + pS - (d+\epsilon)V. \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $S$  为易感人群的数量,  $I$  为染病人群的数量,  $V$  为接种疫苗的人数,  $A$  为人口的常数输入率,  $q$  为新生者被接种的比例,  $p$  为易感人群接种疫苗的比例,  $\gamma$  为染病者的恢复率,  $\epsilon$  为接种疫苗人群的免疫失去率,  $d$  为人口的自然死亡率,  $\alpha$  为染病人群因病死亡的概率,  $\beta - \beta_1 f(I)$  为媒体报道影响下易感者与感染者的有效

收稿日期: 2024-11-15

基金项目: 国家自然科学基金项目(62463005)

第一作者简介: 卜令杰(1989—), 女, 河南兰考人, 讲师, 硕士, 主要从事微分方程动力系统研究。

E-mail: 469523516@qq.com

接触率,  $\beta$  为易感人群与感染人群的最大有效接触率,  $\beta_1$  为媒体报道对疾病传播的最大削减作用。由于媒体报道作用的有限性致使  $\beta > \beta_1$ , 且  $f(I)$  满足

$$f(0)=0, f'(I) \geq 0, \lim_{I \rightarrow +\infty} f(I) \leq 1, \frac{\partial \{[\beta - \beta_1 f(I)]SI\}}{\partial I} > 0;$$

SISV 模型中涉及的参数都是非负的常数。显然,

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dV}{dt} = A - d(S+I+V) - \alpha I \leq A - d(S+I+V).$$

所以  $\limsup_{t \rightarrow +\infty} (S+I+V) \leq \frac{A}{d}$ , 即集合  $\Omega = \{(S, I, V) \in \mathbf{R}_+^3 : S+I+V \leq \frac{A}{d}\}$  是模型(1)的正向不变集。

## 1 基本再生数和平衡点的存在性

模型(1)总存在无病平衡点  $P_0(\frac{A[\epsilon+d(1-q)]}{d(d+\epsilon+p)}, 0, \frac{A(p+qd)}{d(d+\epsilon+p)})$ , 而地方病平衡点是否存在依赖于基本再生数  $R_0$ , 下文利用再生矩阵谱半径方法<sup>[13]</sup>来确定基本再生数  $R_0$ 。

令  $\frac{dX}{dt} = \frac{d}{dt}(I, V, S)$ , 则模型(1)可表示为  $\frac{dX}{dt} = \Phi(x) - \varphi(x)$ , 且

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} [\beta - \beta_1 f(I)]SI \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi(x) = \begin{pmatrix} (d+\alpha+\gamma)I \\ [\beta - \beta_1 f(I)]SI + (d+p)S - \gamma I - \epsilon V - (1-q)A \\ (d+\epsilon)V - qA - pS \end{pmatrix}.$$

则

$$F = D\Phi(x)|_{P_0} = \begin{pmatrix} \frac{\beta A[\epsilon+d(1-q)]}{d(d+\epsilon+p)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, V = D\varphi(x)|_{P_0} = \begin{pmatrix} d+\alpha+\gamma & 0 \\ 0 & d+\epsilon \end{pmatrix},$$

所以基本再生数  $R_0 = \rho(FV^{-1}) = \frac{\beta A[\epsilon+d(1-q)]}{d(d+\epsilon+p)(d+\alpha+\gamma)}$ 。

**定理 1** 当  $R_0 < 1$  时, 模型(1)仅有无病平衡点  $P_0(\frac{A[\epsilon+d(1-q)]}{d(d+\epsilon+p)}, 0, \frac{A(p+qd)}{d(d+\epsilon+p)})$ ; 当  $R_0 > 1$  时, 模型(1)除了无病平衡点  $P_0$  外, 还有一个地方病平衡点  $P^*(S^*, I^*, V^*)$ 。

**证明** 令模型(1)右端的式子都为 0, 可得

$$\begin{cases} (1-q)A - [\beta - \beta_1 f(I)]SI - (d+p)S + \gamma I + \epsilon V = 0, \\ [\beta - \beta_1 f(I)]SI - (d+\alpha+\gamma)I = 0, \\ qA + pS - (d+\epsilon)V = 0. \end{cases} \quad (2)$$

当  $I=0$  时, 由方程组(2)可得模型(1)的无病平衡点  $P_0(\frac{A[\epsilon+d(1-q)]}{d(d+\epsilon+p)}, 0, \frac{A(p+qd)}{d(d+\epsilon+p)})$ 。

当  $I \neq 0$  时, 由方程组(2)中的第 2 个方程可得

$$S = \frac{d+\alpha+\gamma}{\beta - \beta_1 f(I)}. \quad (3)$$

由方程组(2)中的第 3 个方程可得

$$V = \frac{pS+qA}{d+\epsilon}. \quad (4)$$

将式(3)代入式(4)可得

$$V = \frac{p(d+\alpha+\gamma) + qA[\beta - \beta_1 f(I)]}{(d+\epsilon)[\beta - \beta_1 f(I)]}. \quad (5)$$

将方程组(2)中的第 1 个方程与第 2 个方程相加可得

$$(1-q)A - (d+\alpha)I - (d+p)S + \epsilon V = 0. \quad (6)$$

将式(5)代入式(6)可得

$$S = \frac{(1-q)A}{(d+p)} - \frac{(d+\alpha)I}{(d+p)} + \frac{\epsilon p(d+\alpha+\gamma) + \epsilon qA[\beta - \beta_1 f(I)]}{(d+p)(d+\epsilon)[\beta - \beta_1 f(I)]}. \quad (7)$$

由式(3)和式(7)可得关于  $I$  的方程

$$A(d+\epsilon-qd)[\beta - \beta_1 f(I)] - (d+\epsilon)(d+\alpha)[\beta - \beta_1 f(I)]I - d(d+\epsilon+p)(d+\alpha+\gamma) = 0.$$

令

$$f(I) = A(d+\epsilon-qd)[\beta - \beta_1 f(I)] - (d+\epsilon)(d+\alpha)[\beta - \beta_1 f(I)]I - d(d+\epsilon+p)(d+\alpha+\gamma),$$

对  $f(I)$  求导可得

$$f'(I) = -A(d+\epsilon-qd)\beta_1 f'(I) - (d+\epsilon)(d+\alpha) \frac{d\{[\beta - \beta_1 f(I)]I\}}{dI} < 0,$$

所以,  $f(I)$  在  $[0, +\infty)$  内单调递减。

当  $R_0 > 1$  时,

$$f(0) = A\beta(d+\epsilon-qd) - d(d+\epsilon+p)(d+\alpha+\gamma) > 0,$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{A}{d}\right) &= A(d+\epsilon-qd)\left[\beta - \beta_1 f\left(\frac{A}{d}\right)\right] - (d+\epsilon)(d+\alpha)\left[\beta - \beta_1 f\left(\frac{A}{d}\right)\right] \cdot \frac{A}{d} - d(d+\epsilon+p)(d+\alpha+\gamma) = \\ &= \frac{-Aqd^2 - A\alpha(d+\epsilon)}{d}\left[\beta - \beta_1 f\left(\frac{A}{d}\right)\right] - d(d+\epsilon+p)(d+\alpha+\gamma) < 0. \end{aligned}$$

显然, 存在唯一的  $I^* \in \left(0, \frac{A}{d}\right)$  使得  $f(I) = 0$ 。将  $I^*$  分别代入式(3)、式(5)可得

$$S^* = \frac{d+\alpha+\gamma}{\beta_1 f(I^*)}, V^* = \frac{p(d+\alpha+\gamma) + qA[\beta - \beta_1 f(I^*)]}{(d+\epsilon)[\beta - \beta_1 f(I^*)]}.$$

定理 1 得证。

## 2 无病平衡点的局部稳定性

**定理 2** 当  $R_0 < 1$  时, 无病平衡点  $P_0$  是局部渐近稳定的; 当  $R_0 > 1$  时,  $P_0$  不稳定。

**证明** 模型(1)在  $P_0\left(\frac{A[\epsilon+d(1-q)]}{d(d+\epsilon+p)}, 0, \frac{A(p+qd)}{d(d+\epsilon+p)}\right)$  处的 Jacobian 矩阵为

$$J(P_0) = \begin{pmatrix} -(d+p) & -\frac{A\beta(\epsilon+d-dq)}{d(d+\epsilon+p)} + \gamma & \epsilon \\ 0 & \frac{A\beta(\epsilon+d-dq)}{d(d+\epsilon+p)} - (d+\alpha+\gamma) & 0 \\ p & 0 & -(d+\epsilon) \end{pmatrix}.$$

显然,  $J(P_0)$  有 3 个特征根  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 。其中,  $\lambda_1 = \frac{A\beta(\epsilon+d-dq)}{d(d+\epsilon+p)} - (d+\alpha+\gamma)$ ,  $\lambda_2$  和  $\lambda_3$  满足方程

$$\lambda^2 + (2d+\epsilon+p)\lambda + d(d+\epsilon+p) = 0,$$

且  $\lambda_2 + \lambda_3 = -(2d+\epsilon+p)$ ,  $\lambda_2 \lambda_3 = d(d+\epsilon+p) > 0$ , 所以  $\lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$ 。

当  $R_0 = \frac{\beta A[\epsilon+d(1-q)]}{d(d+\epsilon+p)(d+\alpha+\gamma)} < 1$  时,  $\lambda_1 < 0$ , 则无病平衡点  $P_0$  局部渐近稳定; 当  $R_0 = \frac{\beta A[\epsilon+d(1-q)]}{d(d+\epsilon+p)(d+\alpha+\gamma)} > 1$  时,  $\lambda_1 > 0$ , 则无病平衡点  $P_0$  不稳定。定理 2 得证。

## 3 无病平衡点的全局稳定性

把模型(1)改写为

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = F(X, Y), \\ \frac{dY}{dt} = G(X, Y), \\ G(X, 0) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

其中,  $X \in \mathbf{R}_+^3, Y \in \mathbf{R}_+$  分别代表未感染者和感染者, 设  $U_0 = (X_0, 0)$  为模型(8)的无病平衡点。

**定理 3** 当  $R_0 < 1$  时, 无病平衡点  $P_0$  全局渐近稳定。

**证明** 根据文献[14]中的引理, 把模型(1)化为  $\frac{dX}{dt} = F(X, Y), \frac{dY}{dt} = G(X, Y)$ 。其中,

$$\begin{aligned} F(X, Y) &= ((1-q)A - [\beta - \beta_1 f(I)]SI - (d+p)S + \gamma I + \epsilon V, qA + pS - (d+\epsilon)V)', \\ G(X, Y) &= [\beta - \beta_1 f(I)]SI - (d+\alpha+\gamma)I, \end{aligned}$$

满足  $G(X, 0) = 0, X = (S, V)', Y = I$ 。模型(1)的无病平衡点  $U_0 = P_0 = (X_0, 0)$ , 其中,  $X_0 = (\frac{A[\epsilon + d(1-q)]}{d(d+\epsilon+p)}, \frac{A(p+qd)}{d(d+\epsilon+p)})$ 。当  $t \rightarrow +\infty$  时,  $X \rightarrow X_0$ , 故  $X_0$  是全局渐近稳定的, 满足文献[14]中引理的条件(1), 有

$$G(X, Y) = -(d+\alpha+\gamma)(1-R_0)I - [\beta - \beta_1 f(I)]I \left[ \frac{(1-q)Ad\beta + A\epsilon\beta}{d(d+\epsilon+p)[\beta - \beta_1 f(I)]} - S \right].$$

由于  $S \leq \frac{A[\epsilon + d(1-q)]}{d(d+\epsilon+p)}$  且  $\frac{\beta}{[\beta - \beta_1 f(I)]} \geq 1$ , 所以  $S \leq \frac{(1-q)Ad\beta + A\epsilon\beta}{d(d+\epsilon+p)[\beta - \beta_1 f(I)]}$ , 即

$$\hat{G}(X, Y) = \frac{(1-q)Ad\beta + A\epsilon\beta}{d(d+\epsilon+p)[\beta - \beta_1 f(I)]} - S \geq 0, \forall (X, Y) \in \Omega,$$

满足文献[14]中引理的条件(2)。综上所述, 定理 3 成立。

#### 4 地方病平衡点的全局稳定性

**定理 4** 当  $R_0 > 1$  时, 地方病平衡点  $P^*(S^*, I^*, V^*)$  全局渐近稳定。

**证明** 构造 Lyapunov 函数

$$V(t) = \frac{1}{2} [(S - S^*) + (I - I^*) + (V - V^*)]^2,$$

计算  $V(t)$  关于时间  $t$  的导数

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= [(S - S^*) + (I - I^*) + (V - V^*)] \left( \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dV}{dt} \right) = \\ &= [(S - S^*) + (I - I^*) + (V - V^*)] [A - dS - (d+\alpha)I - dV]. \end{aligned}$$

由  $P^*$  满足的方程可得  $A - dS^* - (d+\alpha)I^* - dV^* = 0$ , 即  $A = dS^* + (d+\alpha)I^* + dV^*$ 。因此,

$$\frac{dV(t)}{dt} = -[(S - S^*) + (I - I^*) + (V - V^*)] [d(S - S^*) + (d+\alpha)(I - I^*) + d(V - V^*)] \leq 0,$$

当且仅当  $S = S^*, I = I^*, V = V^*$  时,  $\frac{dV(t)}{dt} = 0$ 。根据 LaSalle 不变原理, 可得地方病平衡点  $P^*$  是全局渐近稳定的。证毕。

#### 5 最优控制

媒体报道能够迅速传播关于传染病的信息, 影响公众的认知、态度和行为。积极的报道可以提高公众的预防意识, 有助于控制传染病传播; 不负责任或夸大报道可能引发恐慌, 影响政策的制定和施行及公众行为。因此, 需要对具有媒体报道影响的传染病模型进行最优控制的研究, 以达到降低控制传染病成本的目的。由于媒体报道对传染率、疫苗接种、治疗有一定的影响, 在模型(1)中引入控制变量  $u_i(t) (i=1, 2,$

3,4)。其中,  $u_1(t)$  表示新生儿接种疫苗的有效率,  $u_2(t)$  表示除新生儿外人群接种疫苗的有效率,  $u_3(t)$  表示媒体报道使得传染率最大限度降低的概率,  $u_4(t)$  表示患者经过治疗痊愈的概率。定义控制集

$$U = \{ (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t)) | (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t)) \in [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1], t \in [0, T] \},$$

其中,  $T$  表示控制策略结束的时间。用  $k_1 I(t)$  表示感染人群的权重,  $k_2, k_3, k_4, k_5$  分别表示新生儿接种疫苗的有效率、除新生儿外人群接种疫苗的有效率、媒体报道使得传染率最大限度降低的概率、患者经过治疗痊愈的概率的权重,  $k_2 u_1^2, k_3 u_2^2, k_4 u_3^2, k_5 u_4^2$  分别描述新生儿接种疫苗、除新生儿外人群接种疫苗、媒体报道和治疗的相关成本。定义最优目标函数

$$J(u_1, u_2, u_3, u_4) = \int_0^T [k_1 I(t) + k_2 u_1^2 + k_3 u_2^2 + k_4 u_3^2 + k_5 u_4^2] dt \quad (9)$$

受约束于

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = (1-u_1)A - [\beta - u_3 f(I)]SI - (d+u_2)S + u_4 I + \epsilon V, \\ \frac{dI}{dt} = [\beta - u_3 f(I)]SI - (d+\alpha+u_4)I, \\ \frac{dV}{dt} = u_1 A + u_2 S - (d+\epsilon)V. \end{cases} \quad (10)$$

其中,  $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5$  均为正常数,  $J(u_1, u_2, u_3, u_4)$  为控制疾病传播的总代价。因此, 需求  $u^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*, u_4^*)$  使得  $J(u^*) = \min J(u_1, u_2, u_3, u_4)$ 。

**定理 5** 针对最优控制问题(9)和(10), 在  $U$  中一定存在最优控制  $u^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*, u_4^*)$  使得

$$J(u^*) = \min_{u_1, u_2, u_3, u_4 \in U} J(u_1, u_2, u_3, u_4),$$

其中  $U$  是紧凸集。

**证明** 显然, 目标函数(9)在  $u_1, u_2, u_3, u_4$  上具有凸性, 且模型(10)的右端有界, 因此, 最优控制存在的充分条件确保了最优控制的存在<sup>[15]</sup>。

定义 Hamilton 函数

$$\begin{aligned} H(S, I, V, u_1, u_2, u_3, u_4, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = & k_1 I(t) + k_2 u_1^2 + k_3 u_2^2 + k_4 u_3^2 + k_5 u_4^2 + \\ & \lambda_1 \{ (1-u_1)A - [\beta - u_3 f(I)]SI - (d+u_2)S + u_4 I + \epsilon V \} + \\ & \lambda_2 \{ [\beta - u_3 f(I)]SI - (d+\alpha+u_4)I \} + \lambda_3 [u_1 A + u_2 S - (d+\epsilon)V], \end{aligned}$$

其中,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  是协态变量。

**定理 6** 若  $u_1^*, u_2^*, u_3^*, u_4^*$  是最优控制问题(9)和(10)的最优控制变量, 且  $S^*, I^*, V^*$  是相应的最优状态变量, 则存在协态变量  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  满足方程

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_1}{dt} = & \lambda_1 [(\beta - u_3 f(I^*))I^* + d + u_2] - \lambda_2 (\beta - u_3 f(I^*))I^* - \lambda_3 u_2, \\ \frac{d\lambda_2}{dt} = & -k_1 + \lambda_1 [(\beta S^* - u_3 f'(I^*))S^* I^* - u_3 f(I^*)S^* - u_4] + \\ & \lambda_2 [u_3 f'(I^*)S^* I^* + u_3 f(I^*)S^* - \beta S^* + d + \alpha + u_4], \\ \frac{d\lambda_3}{dt} = & -\lambda_1 \epsilon + (d + \epsilon)\lambda_3, \end{aligned}$$

且边界条件为  $\lambda_1(T) = 0, \lambda_2(T) = 0, \lambda_3(T) = 0$ 。相应的最优控制变量为

$$\begin{aligned} u_1^* = & \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{A(\lambda_1 - \lambda_3)}{2k_2} \right\}, 1 \right\}, u_2^* = \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)S^*}{2k_3} \right\}, 1 \right\}, \\ u_3^* = & \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)f(I^*)S^* I^*}{2k_4} \right\}, 1 \right\}, u_4^* = \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)I^*}{2k_5} \right\}, 1 \right\}. \end{aligned}$$

**证明** 根据 Pontryagin 最大值原理知, 存在协态变量  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  满足方程

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial S}, \frac{d\lambda_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial I}, \frac{d\lambda_3}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial V},$$

且边界条件为 $\lambda_1(T)=0, \lambda_2(T)=0, \lambda_3(T)=0$ 。根据最优条件可得,当 $u_1=u_1^*$ 时有 $\frac{\partial H}{\partial u_1}=0$ ,当 $u_2=u_2^*$ 时

有 $\frac{\partial H}{\partial u_2}=0$ ,当 $u_3=u_3^*$ 时有 $\frac{\partial H}{\partial u_3}=0$ ,当 $u_4=u_4^*$ 时有 $\frac{\partial H}{\partial u_4}=0$ 。因此,

$$u_1^* = \frac{A(\lambda_1 - \lambda_3)}{2k_2}, u_2^* = \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)S^*}{2k_3}, u_3^* = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)f(I^*)S^*I^*}{2k_4}, u_4^* = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)I^*}{2k_5}。$$

根据定义的控制集 $U$ ,有

$$u_1^* = \begin{cases} 0, \frac{A(\lambda_1 - \lambda_3)}{2k_2} < 0, \\ \frac{A(\lambda_1 - \lambda_3)}{2k_2}, 0 \leq \frac{A(\lambda_1 - \lambda_3)}{2k_2} \leq 1, \\ 1, \frac{A(\lambda_1 - \lambda_3)}{2k_2} > 1, \end{cases} \quad u_2^* = \begin{cases} 0, \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)S^*}{2k_3} < 0, \\ \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)S^*}{2k_3}, 0 \leq \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)S^*}{2k_3} \leq 1, \\ 1, \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)S^*}{2k_3} > 1, \end{cases}$$

$$u_3^* = \begin{cases} 0, \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)f(I^*)S^*I^*}{2k_4} < 0, \\ \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)f(I^*)S^*I^*}{2k_4}, 0 \leq \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)f(I^*)S^*I^*}{2k_4} \leq 1, \\ 1, \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)f(I^*)S^*I^*}{2k_4} > 1, \end{cases} \quad u_4^* = \begin{cases} 0, \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)I^*}{2k_5} < 0, \\ \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)I^*}{2k_5}, 0 \leq \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)I^*}{2k_5} \leq 1, \\ 1, \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)I^*}{2k_5} > 1, \end{cases}$$

且可以改写成定理6中的形式。证毕。

## 6 结束语

本文构建了受媒体报道与疫苗接种双重影响的 SISV 模型,通过推导其基本再生数,证明了平衡点的存在性及稳定性,为解析疾病传播机制奠定了基础。以疫苗接种有效率、疾病传染率及治疗有效率为核心变量,构建并求解最优控制问题,为疾病的防控决策提供量化支撑。若后续可结合某种疾病的实时监测数据对模型参数估算后再做优化,会更有使用价值。

## 参考文献:

- [1] LIU Y P, CUI J G. The impact of media coverage on the dynamics of infectious disease[J]. International journal of biomathematics, 2008, 1(1): 65-74.
- [2] TCHUENGE J M, BAUCH C T. Dynamics of an infectious disease where media coverage influences transmission[J]. International scholarly research network, 2012, 1(2): 581274.
- [3] 刘玉英,肖燕妮.一类受媒体影响的传染病模型的研究[J].应用数学和力学, 2013, 34(4): 399-407.
- [4] 白娟,贾建文.具有媒体报道影响的 SIR 模型分析[J].应用数学, 2018, 31(1): 135-140.
- [5] 常玉婷,牛辰洁,杨健.媒体报道影响下具有非线性感染率的传染病模型研究[J].洛阳师范学院学报, 2019, 38(11): 6-10.
- [6] 张晓磊,刘茂省.一类受媒体报道影响的传染病模型分析[J].河北师范大学学报(自然科学版), 2022, 46(5): 433-439.
- [7] 李丹,魏凤英,毛学荣.具有媒体报道的 SVIR 传染病模型的生存性分析[J].数学物理学报, 2023, 43(5): 1595-1606.
- [8] 周林华,吕堂红.具疫苗免疫策略传染病模型的后向分支[J].长春理工大学学报(自然科学版), 2012, 35

(3):109-113.

- [9] 张鑫喆,贺国峰,黄刚. 一类具有接种和潜伏期的传染病模型及动力学分析[J]. 数学物理学报,2019,39(5):1247-1259.
- [10] 李春红,王林林,万晶晶,等. 一类具疫苗接种影响的 2019 新型冠状病毒 SEIQR 模型稳定性分析[J]. 沈阳大学学报(自然科学版),2022,34(1):77-82.
- [11] 李录革,孔丽丽,康淑瑰. 一类具有疫苗接种的随机埃博拉传染病模型的动力学分析[J]. 西北师范大学学报(自然科学版),2023,59(1):35-42.
- [12] 葛清,贺大奎,马慧芳. 分数阶 SISV 传染病模型的稳定性分析[J]. 重庆理工大学学报(自然科学版),2016,30(7):146-148.
- [13] 崔玉美,陈姗姗,傅新楚. 几类传染病模型中基本再生数的计算[J]. 复杂系统与复杂性科学,2017,14(4):14-31.
- [14] CASTILLO-CHAVEZ C, SONG B. Dynamical models of tuberculosis and their applications[J]. Mathematical biosciences and engineering,2004,1(2):361-404.
- [15] KHAN T, ZAMAN G, CHOCHAN M I. The transmission dynamic and optimal control of acute and chronic hepatitis B[J]. Journal of biological dynamics,2017,11(1):172-189.

## A class of SISV model influenced by media coverage and vaccination

BU Lingjie<sup>1</sup>, XING Wei<sup>2</sup>

(1. General Education Center, Zhengzhou Business University, Zhengzhou 451200, China;

2. School of Information and Communication Engineering,  
Hainan University, Haikou 570228, China)

**Abstract:** The SISV model influenced by both media coverage and vaccination is established, the basic reproduction number of the model is derived. The existence and stability of the equilibrium points of the model are derived. Therefore, vaccination efficacy, disease transmission rate and treatment efficacy are introduced as core control variables into the SISV model to formulate an optimal control problem, and an optimal control scheme satisfying the constraint conditions is obtained.

**Keywords:** SISV model; basic reproduction number; equilibrium point; existence; stability; optimal control

(责任编辑:贾晶晶)

**引用格式** 卜令杰,邢伟. 一类受媒体报道和疫苗接种影响的 SISV 模型[J]. 山东航空学院学报,2026,43(2):90-96.

BU L J, XING W. A class of SISV model influenced by media coverage and vaccination[J]. Journal of Shandong University of Aeronautics,2026,43(2):90-96.