

【基础理论研究】微分方程与动力系统专题

具有替代性食饵的捕食者-食饵模型的
动力学分析杨睿文^{1,2}, 李杰梅²

(1. 新疆政法学院 基础教学部, 新疆 图木舒克 843900;

2. 兰州交通大学 数理学院, 甘肃 兰州 730070)

摘 要: 研究了一类具有替代性食饵的捕食者-食饵模型, 讨论了系统平衡点的存在性以及稳定性。在生态系统中, 由于很多外界因素使得捕食者的死亡率不是一个稳定的常数, 故选用死亡率作为分支参数来研究系统 Hopf 分支的存在性和方向。通过数值模拟验证了理论结果的正确性, 在不同参数的情况下, 系统正平衡点的个数以及稳定性会发生变化。

关键词: 捕食者-食饵模型; 替代性食饵; Hopf 分支; 稳定性; 数值模拟

中图分类号: O 175 **文献标识码:** A **DOI:** 10.13486/j.issn.2097-4973.2026.02.012

0 引言

捕食者与食饵之间的相互作用是生态学研究的核心问题之一, 其动态关系直接影响生物种群的数量、物种多样性和生态系统的稳定性。捕食者-食饵模型的理论基础源于美国生物学家 Alfred J. Lotka 和意大利数学家 Vito Volterra 共同构建的 Lotka-Volterra 模型^[1]。在经典的 Lotka-Volterra 模型中, 食饵种群在无捕食者时的增长为不受资源限制的指数形式, 忽视了自然生态系统中资源有限性对种群增长的密度制约效应。为增强模型的生态合理性, Verhulst 引入逻辑增长机制 $dN/dt = rN(1 - N/K)$, 通过环境承载力参数 K 刻画资源上限对食饵增长的渐近抑制, 使无捕食者时食饵自然呈现型饱和增长^[1]。

近年来, 许多学者研究了具有 Logistic 增长项和 Holling-Ⅱ 功能反应函数的捕食者-食饵模型^[2-3], 但是 Holling-Ⅱ 功能反应函数可能会导致“富集悖论”的产生, 即增加生物多样性并不总是会提高生态系统的功能, 有时反而会导致功能的降低。Beddington-DeAngelis 功能反应函数^[4-5]与 Holling-Ⅱ 功能反应函数形式相似, 但其在分母部分有额外的一项 bP , 用来描述捕食者之间的相互干扰, 其函数形式为 $\delta N/(1 + aN + bP)$, 这里 a 和 b 均为正数, 该功能反应函数表明系统受到食饵和捕食者的共同影响。

在捕食-食饵系统中, 由于某一食饵占据主导地位, 捕食者的捕食行为主要集中在该食饵上。因此, 许多学者聚焦核心机制^[6-7], 在捕食者-食饵模型中只考虑单一的食饵(称为焦点食饵), 未考虑捕食者还会捕食其他食饵(称为替代性食饵)的情形。而在生态环境中, 由于环境恶劣或其他因素导致焦点食饵大量减少, 不足以维持捕食者的生存, 捕食者会转向其他可用的食饵资源来维持自身的生存。替代性食饵项的加

收稿日期: 2025-03-09

基金项目: 甘肃省自然科学基金重点项目(23JRRA861)

第一作者简介: 杨睿文(1999—), 男, 甘肃秦安人, 硕士, 主要从事常微分方程与动力系统研究。

E-mail: yangruiwen2620@163.com

通信作者简介: 李杰梅(1981—), 女, 甘肃甘谷人, 教授, 博士, 主要从事常微分方程与动力系统研究。

E-mail: lijie mei81@126.com

人使得捕食者对两种食饵的捕获率增高,提高捕食者的生存概率。同时,由于捕食者对替代性食饵的偏好可能会降低捕食者对焦点食饵的捕食,避免因食饵短缺而造成焦点食饵种群数量的骤降或者灭绝,因此,在捕食者-食饵模型中引入替代性食饵项是非常有必要的。Kar 等考虑了一种替代性食饵的捕食者-食饵模型^[8]

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) - \frac{\delta N(t)P(t)}{a + N(t)}, \\ \frac{dP(t)}{dt} = \frac{e\delta N(t)P(t)}{a + N(t)} + sP(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) - \mu P(t), \end{cases}$$

其中,替代性食饵项为 $sP(1 - N/K)$, s 表示替代性食饵的转化率。从替代性食饵项可以看出,当焦点食饵灭绝 ($N \rightarrow 0$) 时,捕食者会因替代性食饵的存在而有继续生存的概率;当焦点食饵达到环境最大承载力 ($N \rightarrow K$) 时,捕食者只捕食焦点食饵,而不会去捕食替代性食饵。Wang 等在上述模型的基础上研究了强 Allee 效应的捕食者-食饵模型,发现捕食者死亡率对模型的动力学行为有很大的影响,当死亡率大于临界值时,系统会出现多个分支行为^[9];Chen 等在上述模型中考虑了食饵具有避难所的情形^[10]。但以上文献都未考虑可能发生的“富集悖论”。

本文研究具有 Beddington-DeAngelis 功能反应函数和替代性食饵的捕食者-食饵模型

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - \frac{\delta NP}{1 + a_1 N + b_1 P}, \\ \frac{dP}{dt} = \frac{e_1 \delta NP}{1 + a_1 N + b_1 P} + s_1 P \left(1 - \frac{N}{K}\right) - \mu_1 P \end{cases} \quad (1)$$

平衡点的稳定性、Hopf 分支的存在性和分支方向。其中, N 表示 t 时刻食饵的密度, P 表示 t 时刻捕食者的密度,参数 r 表示食饵的内禀增长率, K 表示环境承载力, δ 表示单位捕食者对食饵的捕获率, a_1 表示捕食者处理食饵的时间, b_1 表示捕食者之间的相互干扰程度, e_1 表示捕食者将食饵转化为自身繁殖的效率, s_1 表示替代性食饵的转化率, μ_1 表示捕食者的死亡率。为简化模型,在系统(1)中引入无量纲变换

$$N = Kn, P = \frac{rP}{\delta}, T = \frac{t}{r},$$

系统(1)可化为

$$\begin{cases} \frac{dn}{dt} = n(1-n) - \frac{np}{1+an+bp}, \\ \frac{dp}{dt} = \frac{enp}{1+an+bp} + sp(1-n) - \mu p, \end{cases} \quad (2)$$

其中, $a = a_1 K$, $b = \frac{b_1 r}{a_1}$, $e = \frac{\delta e_1 K}{r}$, $s = \frac{s_1}{r}$, $\mu = \frac{\mu_1}{r}$ 。本文给定初始条件为 $n(0) = n_0 > 0$, $p(0) = p_0 > 0$ 。

1 模型解的非负性和有界性

引理 1^[3] 假设 $\zeta, \eta > 0$, 且 $x(0) > 0$, 则对于微分不等式 $\frac{dx}{dt} \leq x(t)(\zeta - \eta x(t))$, 有 $\limsup_{t \rightarrow +\infty} x(t) \leq \frac{\zeta}{\eta}$,

以及对于 $\frac{dx}{dt} \geq x(t)(\zeta - \eta x(t))$, 有 $\liminf_{t \rightarrow +\infty} x(t) \geq \frac{\zeta}{\eta}$ 。

定理 1 系统(2)的所有可能解 (n, p) 在 $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$ 上非负且有界。

证明 假设 $n(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 非负不成立, 即 $\exists t_0 \in (0, +\infty)$, 使 $n(t_0) < 0$, 因为 $n(0) > 0$, 不妨记 t_1 为 $n(t)$ 首次穿过 t 轴的时刻, 则 $n(t_1) = 0$, $\left. \frac{dn}{dt} \right|_{t=t_1} < 0$ 。由系统(2)的第一个方程知 $\left. \frac{dn}{dt} \right|_{t=t_1} = 0$, 矛盾! 这表明 $n(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 是非负的。同理可证 $p(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 也是非负的。因为

$$\frac{dn}{dt} = n(1-n) - \frac{np}{1+an+bp} \leq n(1-n),$$

根据引理1得 $\limsup_{t \rightarrow +\infty} n(t) \leq 1$ 。结合 $n(t)$ 的连续性知,存在正数 M ,使得 $0 \leq n(t) \leq M$ 。令

$$L(t) = n(t) + \frac{1}{e}p(t), m = \max_{0 \leq n \leq M} \{n(1-n) + (\mu-s)n\},$$

则

$$\frac{dL}{dt} = n(1-n) + \frac{sp}{e}(1-n) - \frac{\mu p}{e} \leq n(1-n) + (\mu-s)n - (\mu-s)L \leq m - (\mu-s)L.$$

根据 Gronwall 引理,得 $L(t) \leq \frac{m}{\mu-s} - \left(\frac{m}{\mu-s} - L(0)\right)e^{-(\mu-s)t}$,从而 $\lim_{t \rightarrow +\infty} L(t) \leq \frac{m}{\mu-s}$,即系统(2)的所有可能解 (n, p) 在 $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$ 上有界。证毕。

2 平衡点的存在性与稳定性

系统(2)的 Jacobi 矩阵为 $J = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}$,其中,

$$J_{11} = 1 - 2n - \frac{p(1+an+bp) - anp}{(1+an+bp)^2}, J_{12} = -\frac{n(1+an+bp) - bnp}{(1+an+bp)^2},$$

$$J_{21} = \frac{ep(1+an+bp) - aenp}{(1+an+bp)^2} - sp, J_{22} = \frac{en(1+an+bp) - benp}{(1+an+bp)^2} + s(1-n) - \mu,$$

因此,有以下结论:

定理2 系统(2)存在两个边界平衡点 $E_1(0,0)$ 和 $E_2(1,0)$,且: E_1 总是不稳定的;若 $\mu - \frac{e}{1+a} > 0$,则 E_2 是局部渐近稳定的。

证明 易知,系统(2)存在两个边界平衡点,分别为 $E_1(0,0)$ 和 $E_2(1,0)$ 。系统(2)在 $E_1(0,0)$ 处的 Jacobi 矩阵为

$$J|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s - \mu \end{pmatrix},$$

特征方程为 $\lambda^2 - (1+s-\mu)\lambda + s - \mu = 0$,因为 $s < \mu$,特征方程存在一个正根,根据 Hurwitz 判据,系统(2)在 $E_1(0,0)$ 处不稳定。系统(2)在 $E_2(1,0)$ 处的 Jacobi 矩阵为

$$J|_{(1,0)} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{1+a} \\ 0 & \frac{e}{1+a} - \mu \end{pmatrix},$$

特征方程为

$$\lambda^2 + (1 + \mu - \frac{e}{1+a})\lambda + \mu - \frac{e}{1+a} = 0.$$

若 $\mu - \frac{e}{1+a} > 0$,则 $1 + \mu - \frac{e}{1+a} > 0$,特征值都具有负实部。根据 Hurwitz 判据,系统(2)在 $E_2(1,0)$ 处局部渐近稳定。证毕。

下面讨论系统(2)正平衡点的情况。令系统(2)右端为0,得到

$$\begin{cases} n(1-n) - \frac{np}{1+an+bp} = 0, \\ \frac{enp}{1+an+bp} + sp(1-n) - \mu p = 0. \end{cases} \quad (3)$$

将系统(3)的第1个方程乘以 e 后与第2个方程相加得 $en(1-n) + sp(1-n) - \mu p = 0$,整理得

$$p = \frac{en(1-n)}{\mu - s(1-n)}, \quad (4)$$

将系统(3)的第 2 个方程除以 p , 得

$$\frac{en}{1+an+bp} + s(1-n) - \mu = 0, \quad (5)$$

将式(4)代入式(5)整理得

$$(be-as)n^2 + (as-be+e-a\mu-s)n + (s-\mu) = 0, \quad (6)$$

记 $\Delta = (as-be+e-a\mu-s)^2 - 4(be-as)(s-\mu)$ 。

(i) 若 $be > as$, 因 $\mu > s$, 于是方程(6)有一个正实根, 记为 n_3 , 即 $n_3 = \frac{-(as-be+e-a\mu-s) + \sqrt{\Delta}}{2(be-as)}$;

(ii) 若 $be < as$ 且 $\Delta > 0$, $as-be+e-a\mu-s > 0$, 于是方程(6)有两个正实根, 分别记为 n_4 和 n_5 , 即

$$n_4 = \frac{-(as-be+e-a\mu-s) + \sqrt{\Delta}}{2(be-as)}, n_5 = \frac{-(as-be+e-a\mu-s) - \sqrt{\Delta}}{2(be-as)};$$

(iii) 若 $be = as$, 且 $e-a\mu-s > 0$, 于是方程(6)有一个正实根, 记为 n_6 , 即 $n_6 = \frac{\mu-s}{e-a\mu-s}$ 。

由式(4)可知, $p_i = \frac{en_i(1-n_i)}{\mu-s(1-n_i)}$, $i=3,4,5,6$ 。设 $E_i(n_i, p_i)$ 为系统(2)的可能解, 则系统(2)在 $E_i(n_i, p_i)$

处的 Jacobi 矩阵为

$$J|_{(n_i, p_i)} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix},$$

其中

$$J_{11} = -n_i + \frac{an_i p_i}{(1+an_i+bp_i)^2}, J_{12} = -\frac{n_i(1+an_i p_i) - bn_i p_i}{(1+an_i+bp_i)^2},$$

$$J_{21} = \frac{ep_i(1+a^*+p^*) - aen_i p^*}{(1+an_i+bp_i)^2} - sp^*, J_{22} = -\frac{ben_i p_i}{(1+an_i+bp_i)^2},$$

特征方程为 $\lambda^2 - T\lambda + D = 0$, 其中

$$T = n_i \left(\frac{p_i(a-be)}{(1+an_i+bp_i)^2} - 1 \right), D = \frac{n_i p_i ((1+an_i+bp_i)((be-as)n_i-s) + e)}{(1+an_i+bp_i)^3}.$$

对于平衡点 E_3 , 若

$$p_3(a-be) < (1+an_3+bp_3), (1+an_3+bp_3)((be-as)n_3-s) + e > 0, \quad (7)$$

则 $T < 0, D > 0$, 特征方程对应的特征值具有负实部。根据 Hurwitz 判据, 平衡点 E_3 局部渐近稳定。

对于平衡点 E_4 和 E_5 , 若

$$p_i(a-be) < (1+an_i+bp_i), (1+an_i+bp_i)((be-as)n_i-s) + e > 0, i=4,5, \quad (8)$$

则 $T < 0, D > 0$, 特征方程对应的特征值具有负实部。根据 Hurwitz 判据, 平衡点 E_4 和 E_5 局部渐近稳定。

对于平衡点 E_6 , 若

$$p_6(a-be) < (1+an_6+bp_6), e > (1+an_6+bp_6)s, \quad (9)$$

则 $T < 0, D > 0$, 特征方程对应的特征值具有负实部。根据 Hurwitz 判据, 平衡点 E_6 局部渐近稳定。

综上所述, 可得以下定理:

定理 3 当 $be > as$ 时, 系统(2)有一个正平衡点 $E_3(n_3, p_3)$, 满足式(7)时, E_3 局部渐近稳定; 当 $be < as$, 且 $\Delta > 0$, $as-be+e-a\mu-s > 0$ 时, 系统(2)有两个正平衡点 $E_4(n_4, p_4)$ 和 $E_5(n_5, p_5)$, 满足式(8)时, E_4 和 E_5 局部渐近稳定; 当 $be = as$, 且 $e-a\mu-s > 0$ 时, 系统(2)有一个正平衡点 $E_6(n_6, p_6)$, 满足式(9)时, E_6 局部渐近稳定。

3 Hopf 分支

由于自然灾害、人类活动、环境污染等, 捕食者的死亡率 μ 会发生很大的变化, 改变 μ 的取值, 系统的

稳定性会发生变化,故选用 μ 作为分支参数来说明这一情况,在这里只分析 $be=as$ 的情况下,系统发生的 Hopf 分支。

定理 4 假设 $be=as, e-a\mu-s>0$ 且式(9)成立,当 $\mu=\mu_0, T(n_6(\mu_0), p_0(\mu_0))=0$ 时,系统(2)在正平衡点 E_6 处发生 Hopf 分支。

证明 假设在 μ_0 邻域内的任意一点 μ , 有 $\lambda=\alpha(\mu)\pm i\beta(\mu)$ 。其中,

$$\alpha(\mu)=\frac{T(n_6(\mu), p_6(\mu))}{2}, \beta(u)=\frac{\sqrt{4D(n_6(\mu), p_6(\mu))-T(n_6(\mu), p_6(\mu))}}{2}.$$

有

$$\frac{d}{d\mu}\alpha(\mu)|_{\mu=\mu_0}=\frac{1}{2}\left(\frac{d}{d\mu}T(n_6(\mu), p_6(\mu))\right)\Big|_{\mu=\mu_0},$$

此时,当 $\mu=\mu_0, T(n_6(\mu_0), p_0(\mu_0))=0$ 时, $D(n_6(\mu_0), p_6(\mu_0))>0$, 若 $\frac{d}{d\mu}T(n_6(\mu), p_6(\mu))|_{\mu=\mu_0}\neq 0$, 满足横截性条件,则系统(2)在正平衡点 E_6 处发生 Hopf 分支。证毕。

下面讨论 Hopf 分支的方向和周期解的稳定性。通过相位变化将系统(2)唯一的正平衡点 E_6 移到原点处,令 $\tilde{n}=n-n_6, \tilde{p}=p-p_6$, 为方便书写,仍将 $\tilde{n}, \tilde{p}$ 分别用 n 和 p 代替。则系统(2)化简为

$$\begin{pmatrix} \frac{dn}{dt} \\ \frac{dp}{dt} \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1(n, p, \mu) \\ G_1(n, p, \mu) \end{pmatrix},$$

其中,

$$\begin{aligned} F_1 &= a_{20}n^2 + a_{11}np + a_{02}p^2 + a_{30}n^3 + a_{12}np^2 + a_{21}n^2p + a_{03}p^3 + \dots, \\ G_1 &= b_{20}n^2 + b_{11}np + b_{02}p^2 + b_{30}n^3 + b_{12}np^2 + b_{21}n^2p + b_{03}p^3 + \dots, \\ a_{20} &= -1 + \frac{ap_6(1+bp_6)}{(1+an_6+bp_6)^3}, a_{11} = -\frac{1+2abn_6p_6+an_6+bp_6}{(1+an_6+bp_6)^3}, a_{02} = \frac{bn_6(1+an_6)}{(1+an_6+bp_6)^3}, \\ a_{30} &= -\frac{a^2p_6(1+bp_6)}{(1+an_6+bp_6)^4}, a_{12} = \frac{b(1+2abn_6p_6-a^2n_6^2+bp_6)}{(1+an_6+bp_6)^4}, a_{21} = \frac{a(1+2abn_6p_6+an_6-b^2p_6^2)}{(1+an_6+bp_6)^4}, \\ a_{03} &= -\frac{b^2n_6(1+an_6)}{(1+an_6+bp_6)^4}, b_{20} = -\frac{ae p_6(1+bp_6)}{(1+an_6+bp_6)^3}, b_{11} = \frac{e(1+2abn_6p_6+an_6+bp_6)}{(1+an_6+bp_6)^3} - s, \\ b_{02} &= -\frac{ben_6(1+an_6)}{(1+an_6+bp_6)^3}, b_{30} = \frac{a^2e p_6(1+bp_6)}{(1+an_6+bp_6)^4}, b_{21} = -\frac{ae(1+2abn_6p_6+an_6-b^2p_6^2)}{(1+an_6+bp_6)^4}, \\ b_{12} &= -\frac{be(1+2abn_6p_6-a^2n_6^2+bp_6)}{(1+an_6+bp_6)^4}, b_{03} = \frac{b^2en_6(1+an_6)}{(1+an_6+bp_6)^4}. \end{aligned}$$

令变换 $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$, 其中,

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ E & H \end{pmatrix}, E = \frac{J_{22}-J_{11}}{2J_{12}}, H = \frac{W}{J_{12}}, W = \frac{\sqrt{-T^2+4D}}{2},$$

则系统(2)化简为

$$\begin{pmatrix} \frac{d\xi}{dt} \\ \frac{d\eta}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\mu) & -\beta(\mu) \\ \beta(\mu) & \alpha(\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{F}_1(\xi, \eta, \mu) \\ \tilde{G}_1(\xi, \eta, \mu) \end{pmatrix}.$$

非线性项 $\tilde{F}_1(\xi, \eta, \mu)$ 和 $\tilde{G}_1(\xi, \eta, \mu)$ 的表达式分别为

$$\tilde{F}_1(\xi, \eta, \mu) = A_{20}\xi^2 + A_{11}\xi\eta + A_{02}\eta^2 + A_{30}\xi^3 + A_{12}\xi\eta^2 + A_{21}\xi^2\eta + A_{03}\eta^3 + \dots,$$

$$\tilde{G}_1(\xi, \eta, \mu) = B_{20}\xi^2 + B_{11}\xi\eta + B_{02}\eta^2 + B_{30}\xi^3 + B_{12}\xi\eta^2 + B_{21}\xi^2\eta + B_{03}\eta^3 + \dots,$$

这里

$$A_{20} = a_{02}E^2 + a_{11}E + a_{20}, A_{11} = 2a_{02}EH + a_{11}H, A_{02} = a_{02}H^2, A_{30} = a_{03}E^3 + a_{12}E^2 + a_{21}E + a_{30},$$

$$A_{12} = 3a_{03}EH^2 + a_{12}H^2, A_{21} = 3a_{03}E^2H + 2a_{12}EH + a_{21}H, A_{03} = a_{03}H^3,$$

$$B_{20} = (-a_{02}E^3 - a_{11}E^2 - a_{20}E + b_{02}E^2 + b_{11}E + b_{20})\frac{1}{H}, B_{11} = -2a_{02}E^2 - a_{11}E + 2b_{02}E + b_{11},$$

$$B_{02} = -a_{02}EH + b_{02}H, B_{30} = (-a_{03}E^4 - a_{12}E^3 - a_{21}E^2 - a_{30}E + b_{03}E^3 + b_{12}E^2 + b_{21}E + b_{30})\frac{1}{H},$$

$$B_{12} = -3a_{03}E^2H - a_{12}EH + 3b_{03}EH + b_{12}H,$$

$$B_{21} = -3a_{03}E^3 - 2a_{12}E^2 + b_{03}E^2 - a_{21}E + 2b_{12}E + b_{21}, B_{03} = -a_{03}EH^2 + b_{03}H^2.$$

通过判断 $x(\mu_0)$ 的符号来确定周期解的稳定性,有

$$x(\mu_0) = \frac{1}{16}(\tilde{F}_{\xi\xi} + \tilde{F}_{\xi\eta} + \tilde{G}_{\xi\eta} + \tilde{G}_{\eta\eta}) + \frac{1}{16\beta(\mu_0)}[\tilde{F}_{\xi\eta}(\tilde{F}_{\xi\xi} + \tilde{F}_{\eta\eta}) - \tilde{G}_{\xi\eta}(\tilde{G}_{\xi\xi} + \tilde{G}_{\eta\eta}) - \tilde{F}_{\xi\xi}\tilde{G}_{\xi\xi} + \tilde{F}_{\eta\eta}\tilde{G}_{\eta\eta}].$$

定理 5 当 $x(\mu_0) < 0$ 时, Hopf 分支方向为超临界的, 分支周期解轨道渐近稳定; 当 $x(\mu_0) > 0$ 时, Hopf 分支方向为次临界的, 分支周期解轨道不稳定。

注 1 $x(\mu_0)$ 的表达式相当复杂, 无法直接给出, 将通过数值模拟来验证定理 5 的正确性。

4 数值模拟

通过数值模拟来验证正平衡点 E_6 在不同条件下的稳定性。由于 $x(\mu_0)$ 的表达式相当复杂, 故使用数值模拟来说明 Hopf 分支方向和分支周期解的稳定性。当 $be=as$ 时, 系统(2)存在一个正平衡点 E_6 , 固定参数 $a=3.132\ 2, b=0.114\ 8, e=3.291\ 8, s=0.116\ 3$, 通过改变分支参数 μ 来研究 Hopf 分支, 见图 1~3。

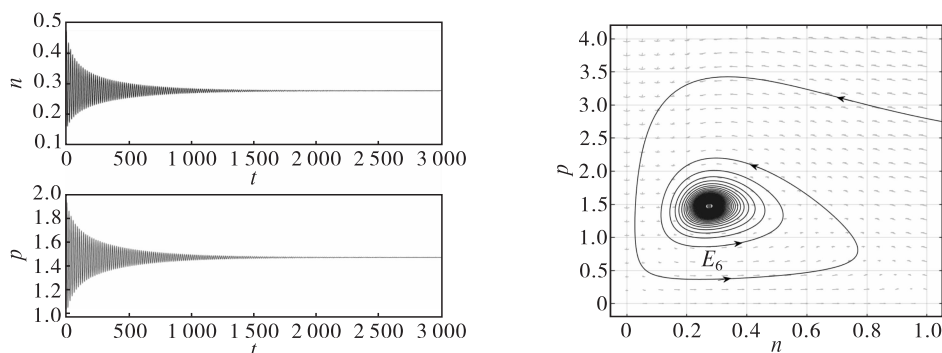


图 1 正平衡点 E_6 局部渐近稳定

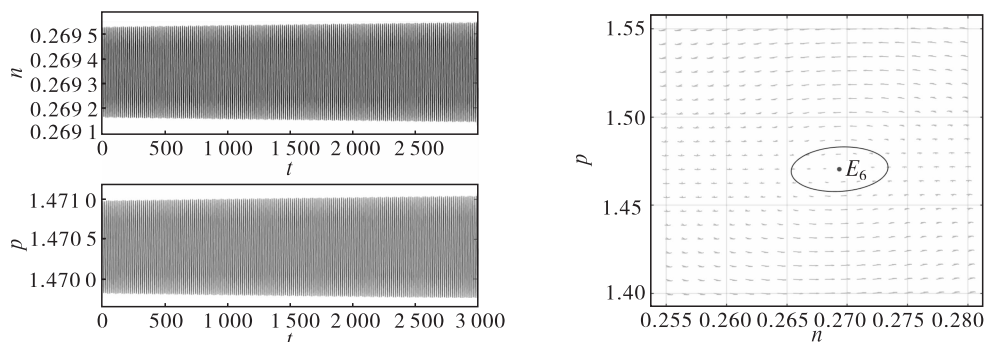


图 2 正平衡点 E_6 产生稳定的周期轨道

由图 1 可知, 当 $\mu_0=0.530$ 时, 正平衡点 E_6 是趋于稳定的。由图 2 可知, 当 $\mu_0=0.525\ 548\ 262\ 214\ 3$

时,正平衡点 E_6 可以产生稳定的周期轨道,计算得 $x(\mu_0) = -0.480\ 025\ 30 < 0$, Hopf 分支的方向为超临界,分支周期解轨道渐近稳定。由图 3 可知,当 $\mu_0 = 5\ 221$ 时,正平衡点 E_6 是不稳定的。当 μ 从 $\mu_0 = 0.525\ 548\ 262\ 214\ 3$ 右侧穿过时,正平衡点 E_6 失去稳定性。

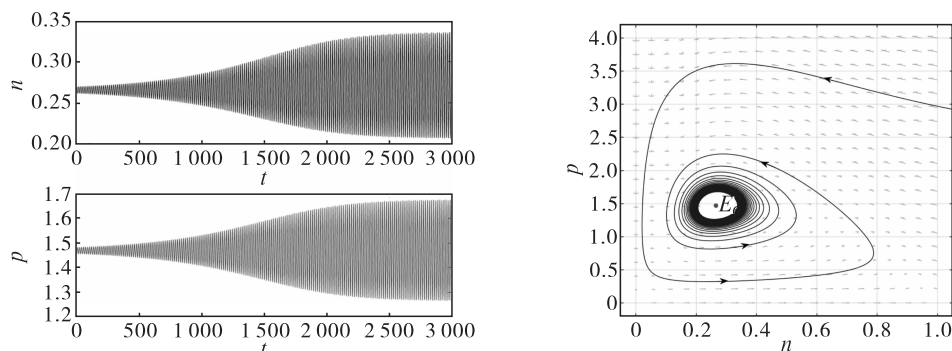


图3 正平衡点 E_6 不稳定

5 结论

基于捕食者一般不会捕食单一食饵的实际,并避免“富集悖论”的产生,研究了具有 Beddington-DeAngelis 功能反应函数和替代性食饵的捕食者-食饵模型。利用常微分方程稳定性理论和 Hurwitz 判据讨论了模型平衡点的存在性和局部稳定性,以及在正平衡点处 Hopf 分支的存在性和分支方向,并分析了相应的生物学意义。

首先,规定捕食者捕食替代性食饵的转换率 s 小于捕食者的死亡率 μ ,这就避免了捕食者因捕食焦点食饵和替代性食饵而造成捕食者种群持续增长的可能,符合实际情况。

其次,由于 $s < \mu$,系统(2)在平衡点 $(0,0)$ 处不稳定,表明捕食者和食饵都不会灭绝,当 $\mu - \frac{e}{1+a} > 0$ 时,系统(2)在平衡点 $(1,0)$ 处局部渐近稳定,表明随着时间的变化,捕食者会逐渐灭绝,而食饵会依旧存在,并保持稳定。

最后,由于自然灾害、人类活动、疾病传播、种群密度等因素,捕食者的死亡率 μ 并不是一个稳定的常数,故选用 μ 作为分支参数,当 $\mu = 0.525\ 548\ 262\ 214\ 3$ 时,系统(2)会存在一个极限环,对分支参数 μ 稍微扰动时,系统(2)的平衡点会变得稳定或者不稳定。

参考文献:

- [1] 马知恩. 种群生态学的数学建模与分析[M]. 合肥:安徽教育出版社,1996.
- [2] ZHU M L, XU H J. Dynamics of a delayed reaction-diffusion predator-prey model with the effect of the toxins[J]. Mathematical biosciences and engineering, 2023, 20(4): 6894-6911.
- [3] KAYAL K, SAMANTA S, CHATTOPADHYAY J. Impacts of predation-driven Allee effect in a predator-prey model[J]. International journal of bifurcation and chaos, 2023, 33(2). DOI:10.1142/s0218127423500232.
- [4] BEDDINGTON J R. Mutual interference between parasites or predators and its effect on searching efficiency[J]. The journal of animal ecology, 1975, 44(1): 331-340.
- [5] DEANGELIS D L, GOLDSTEIN R A, O'NEILL R V. A model for trophic interaction[J]. Ecology, 1975, 56(4). DOI:10.2307/1936298.
- [6] HSU S B. On global stability of a predator-prey system[J]. Mathematical biosciences, 1978, 39

(1/2):1-10.

- [7] HSU S B. A survey of constructing Lyapunov functions for mathematical models in population biology[J]. Taiwanese journal of mathematics, 2005, 9(2):151-173.
- [8] KAR T K, CHATTOPADHYAY S K. A focus on long-run sustainability of a harvested prey predator system in the presence of alternative prey[J]. Comptes rendus biologiques, 2010, 333(11/12):841-849.
- [9] WANG N, ZHAO M, YU H G, et al. Bifurcation behavior analysis in a predator-prey model[J]. Discrete dynamics in nature and society, 2016. DOI:10.1155/2016/3565316.
- [10] CHEN W C, YU H G, DAI C J, et al. Stability and bifurcation in a predator-prey model with prey refuge[J]. Journal of biological systems, 2023, 31(2):417-435.

Dynamics analysis of a predator-prey model with alternative prey

YANG Ruiwen^{1,2}, LI Jiemei²

(1. *Basic Teaching Department, Xinjiang University of Political Science and Law, Tumushuke 843900, China;*

2. *School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China*)

Abstract: A study on a predator-prey model with alternative prey was conducted, discussing the existence and stability of the system's equilibrium points. In the ecosystem, due to various external factors, the mortality rate of predators is not a constant value. Therefore, the mortality rate is chosen as a bifurcation parameter to investigate the existence and direction of the system's Hopf bifurcation. Finally, numerical simulations verified the correctness of the theoretical results, showing that the number and stability of the system's positive equilibrium points change under different parameters.

Keywords: predator-prey model; alternative prey; Hopf bifurcation; stability; numerical simulation

(责任编辑:贾晶晶)

引用格式 杨睿文,李杰梅. 具有替代性食饵的捕食者-食饵模型的动力学分析[J]. 山东航空学院学报, 2026, 43(2):97-104.

YANG R W, LI J M. Dynamics analysis of a predator-prey model with alternative prey[J]. Journal of Shandong University of Aeronautics, 2026, 43(2):97-104.